Plaquette 2 – Trigonalisation pratique et réduites de Jordan en dimension 3

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Construction d'une base de Jordan.

— $v_1 \in \ker(A-\lambda I)$, puis v_2 solution de $(A-\lambda I)v_2 = v_1$, v_3 de $(A-\lambda I)v_3 = v_2$.
— Dans la base (v_1, v_2, v_3) : $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$, $Av_3 = v_2 + \lambda v_3$.
— Blocs de Jordan : $J_k(\lambda) = \lambda I_k + N_k$, avec $N_k^k = 0$ et

$$J_k(\lambda)^n = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} N_k^j$$

Classification en dimension 3 (une seule valeur propre λ, $\chi_A = (X-\lambda)^3$) :

— $\operatorname{rg}(A-\lambda I) = 0$: $A = \lambda I$;
— $\operatorname{rg}(A-\lambda I) = 1$: $A \sim J_2(\lambda) \oplus (\lambda)$;
— $\operatorname{rg}(A-\lambda I) = 2$: $A \sim J_3(\lambda)$.

Correction de l'exercice 1 – Trigonaliser une matrice 2 × 2

a) $\operatorname{tr} A = 6$, $\det A = 5 + 4 = 9$: $\chi_A = (X-3)^2$. $A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$, donc A n'est pas diagonalisable.

b) $\ker(A-3I) = \mathbb{R}(1,2)$: $v_1 = (1,2)$. On résout $2x - y = 1$: $v_2 = (1,1)$ convient ($4 - 2 = 2$ pour la seconde ligne ✓).

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

— Vérification : $Av_2 = (5-1, 4+1) = (4,5) = v_1 + 3v_2$ ✓.

Réponse. $\chi_A = (X-3)^2$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 – Valeur propre double et valeur propre simple

a) $\operatorname{tr} A = 5 = 1 + 1 + 3$ ✓ et
$\det A = 2(2-2) - 1(-4+2) - 1(-2+1) = 0 + 2 + 1 = 3 = 1 \times 1 \times 3$ ✓ ; on vérifie de plus que 1 et 3 annulent χ_A.

b) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 : $E_1 = \mathbb{R}(1,0,1)$, de dimension $1 < 2$. A n'est pas diagonalisable. $E_3 = \mathbb{R}(0,1,1)$ (car $A(0,1,1) = (0,3,3)$).

c) $v_1 = (1,0,1)$; on résout $(A-I)v_2 = v_1$: $v_2 = (1,1,1)$ convient, puisque

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(A-I)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

— et $v_3=(0,1,1)$.

Réponse. $E_1=\mathbb{R}(1,0,1)$, $E_3=\mathbb{R}(0,1,1)$; base $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$.

Correction de l'exercice 3 – Un bloc de Jordan de taille 3

a) $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $N^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $N^3=0$. Donc N est nilpotente d'indice 3 :

$$\chi_A=(X-2)^3,\qquad \pi_A=(X-2)^3$$

b) On part de v_3 avec $N^2v_3\neq 0$: $v_3=(0,1,1)$ donne $v_2=Nv_3=(1,1,1)$ et $v_1=Nv_2=(1,0,1)$, avec $Nv_1=0$ ✓.

c) Dans la base (v_1,v_2,v_3) : $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=J_3(2)$.

Réponse. $N^3=0$, $N^2\neq 0$; $\pi_A=\chi_A=(X-2)^3$; $A\sim J_3(2)$.

Correction de l'exercice 4 – Valeur propre triple, deux blocs

a) $A-I=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$: lignes proportionnelles, rang 1. Pour une matrice M de rang 1, $M^2=\operatorname{tr}(M)M$, et $\operatorname{tr}(A-I)=0$: $(A-I)^2=0$.

b) $A-I$ est nilpotente : $\chi_A=(X-1)^3$, $\pi_A=(X-1)^2$, et

$$\dim E_1=3-\operatorname{rg}(A-I)=2$$

c) $A\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Base : $v_2=e_1$ (non dans E_1), $v_1=(A-I)e_1=(1,0,1)$, et $v_3=(0,1,1)\in E_1=\{x+y-z=0\}$, indépendant de v_1.

Réponse. $\chi_A=(X-1)^3$, $\pi_A=(X-1)^2$, $\dim E_1=2$; $A\sim J_2(1)\oplus(1)$.

Correction de l'exercice 5 – Lesquelles sont semblables ?

a) A_3 est triangulaire de diagonale $(1,1,1)$. A_1-I est nilpotente (exercice précédent). $A_2-I=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ est nilpotente (son cube est nul). Donc $\chi=(X-1)^3$ pour les trois.

b) $\operatorname{rg}(A_1-I)=1$, $\operatorname{rg}(A_2-I)=2$, $\operatorname{rg}(A_3-I)=1$.

c) En dimension 3 avec une seule valeur propre, le rang de $A-I$ détermine la réduite :

$$A_1\sim A_3\sim J_2(1)\oplus(1),\qquad A_2\sim J_3(1)$$

— A_2 n'est semblable à aucune des deux autres (le rang est un invariant de similitude).

Réponse. Même χ ; rangs 1, 2, 1 ; $A_1\sim A_3$, A_2 à part ($J_3(1)$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Une matrice nilpotente 3 × 3

a) $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N^3 = 0$: indice 3.

b) Il suffit que $N^2 x \neq 0$: $x = e_3$ donne $N^2 x = (1,0,1)$, $Nx = (0,1,1)$. La famille est libre (si $aN^2x + bNx + cx = 0$, on applique N^2, puis N). Dans la base (N^2x, Nx, x) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) b) donne une triangulaire stricte. Réciproquement, une triangulaire stricte T a $\chi_T = X^n$, donc $T^n = 0$ par Cayley-Hamilton.

Réponse. Indice 3 ; base (N^2e_3, Ne_3, e_3), réduite $J_3(0)$.

Correction de l’exercice 7 – Trigonalisation en base orthonormée

a) $E_2 = \mathbb{R}(1,1)$: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

b) $Bu_1 = 2u_1$. $Bu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-4,0)$, de coordonnées $\langle Bu_2, u_1\rangle = -2$ et $\langle Bu_2, u_2\rangle = 2$. D’où, avec $O = (u_1\ u_2)$ orthogonale :

$$O^{\mathsf{T}}BO = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) On trigonalise A dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$, puis on orthonormalise par Gram-Schmidt : la base (u_i) obtenue vérifie $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, sous-espaces stables, donc la matrice reste triangulaire.

Réponse. $u_1 = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}$; $O^{\mathsf{T}}BO = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 8 – Puissances d’un bloc de Jordan

a) $2I$ et N commutent, $N^3 = 0$:

$$J^n = 2^n I + n2^{n-1}N + \binom{n}{2}2^{n-2}N^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \binom{n}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

b) Par similitude, avec $M = A - 2I$: $A^n = 2^n I + n2^{n-1}M + \binom{n}{2}2^{n-2}M^2$.

c) $n = 3$: $A^3 = 8I + 12M + 6M^2$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Coefficient $(1,1)$: $8 + 0 - 6 = 2$. Directement, A^2 a pour première ligne $(3,4,1)$, et $(A^3)_{11} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) + 1 \times 0 = 2$ ✓.

Réponse. $J^n = 2^n I + n2^{n-1}N + \binom{n}{2}2^{n-2}N^2$; $A^3 = 8I + 12M + 6M^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Un bloc de Jordan est semblable à sa transposée

a) $K^2 = I$, donc $K^{-1} = K$. Conjuguer par K renverse l'ordre de la base : $Je_1 = \lambda e_1$ et $Je_i = e_{i-1} + \lambda e_i$ deviennent, pour $f_i = e_{k+1-i}$, $Jf_k = \lambda f_k$ et $Jf_i = f_{i+1} + \lambda f_i$. Ainsi

$$KJK = \lambda I + N^{\mathsf{T}} = J^{\mathsf{T}}$$

b) $J^{\mathsf{T}} = KJK^{-1}$: J et J^{T} sont semblables.

c) $A = PJ_AP^{-1}$ avec J_A diagonale par blocs de Jordan. Alors $A^{\mathsf{T}} = (P^{-1})^{\mathsf{T}} J_A^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}}$, et J_A^{T} est semblable à J_A bloc par bloc (avec K par blocs). Donc $A^{\mathsf{T}} \sim J_A \sim A$.

Réponse. $KJK^{-1} = J^{\mathsf{T}}$; toute matrice complexe est semblable à sa transposée.

Correction de l'exercice 10 – Valeurs propres de la comatrice

a) $A\operatorname{com}(A)^{\mathsf{T}} = \det(A) I$, donc $\operatorname{com}(A)^{\mathsf{T}} = \det(A) A^{-1}$.

b) Si $A = PTP^{-1}$, alors $A^{-1} = PT^{-1}P^{-1}$ avec T^{-1} triangulaire de diagonale $\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$. Les valeurs propres de $\operatorname{com}(A)^{\mathsf{T}}$, donc de com$A$ (même spectre que sa transposée), sont

$$\frac{\det A}{\lambda_i} = \prod_{j \neq i} \lambda_j$$

c) $\det A = 6$: valeurs propres 6, 3, 2 ; trace 11 ; déterminant $36 = (\det A)^{n-1}$.

Réponse. Valeurs propres $\prod_{j \neq i} \lambda_j$; ici $6, 3, 2$, trace 11, déterminant 36.

Correction de l'exercice 11 – Commutant d'un bloc de Jordan

a) $Xe_2 = XNe_3 = NXe_3$ et $Xe_1 = N^2 Xe_3$: connaître Xe_3 suffit.

b) $Q(N) = aI + bN + cN^2$ commute avec N et vérifie $Q(N)e_3 = ae_3 + be_2 + ce_1 = Xe_3$. Par a), $X = Q(N)$, soit

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

c) $J_3(\lambda) = \lambda I + N$ commute avec X si et seulement si N commute avec X : le commutant est l'ensemble des matrices triangulaires de Toeplitz ci-dessus, de dimension 3 (c'est $\mathbb{C}[J_3(\lambda)]$).

Réponse. $X = aI + bN + cN^2$ (Toeplitz triangulaire) ; commutant de dimension 3.

Correction de l'exercice 12 – Méthode : trigonaliser par récurrence

a) $Ae_1 = e_1$. $L = (1 \;\; 1)$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) B a pour valeurs propres 3 et 1, de vecteurs propres $(1,1)$ et $(1,-1)$.

c) Dans la base (e_1, f_2, f_3) avec $f_2 = (0,1,1)$, $f_3 = (0,1,-1)$: $Af_2 = (2,3,3) = 2e_1 + 3f_2$ et $Af_3 = (0,1,-1) = f_3$. Matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— La valeur propre 1 est double avec $E_1 \ni e_1, f_3$: $\dim E_1 = 2$, donc A est diagonalisable (le vecteur propre pour 3 est $f_2 + e_1 = (1,1,1)$, puisque $A(1,1,1) = (3,3,3)$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. B diagonalisable ; triangulaire $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; A diagonalisable, $E_3 = \mathbb{R}(1,1,1)$.

Correction de l'exercice 13 – Matrices de M₂(C) à un seul vecteur propre

a) Deux valeurs propres distinctes donneraient la diagonalisabilité : il y en a une seule, double. Si $\dim E_\lambda = 2$, alors $A = \lambda I$, diagonalisable : donc $\dim E_\lambda = 1$.

b) $v_1 \in E_\lambda$ non nul, $v_2 \notin E_\lambda$; $(A-\lambda I)v_2 \in \ker(A-\lambda I)$ (car $(A-\lambda I)^2 = 0$ par Cayley-Hamilton), donc $(A-\lambda I)v_2 = cv_1$ avec $c \neq 0$. Quitte à remplacer v_1 par cv_1 : $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$. Et $2\lambda = \mathrm{tr}A$:

$$A \sim \begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}, \qquad \lambda = \frac{\mathrm{tr}A}{2}$$

c) Même trace ⇒ même λ ⇒ semblables à la même réduite. La réciproque est claire.

Réponse. $A \sim J_2(\lambda)$ avec $\lambda = \frac{\mathrm{tr}A}{2}$; similitude ⇔ même trace.

Correction de l'exercice 14 – Trace nulle et nilpotence en taille 2

a) Nilpotente ⇔ $\mathrm{Sp}A = \{0\}$ ⇔ $\chi_A = X^2$ ⇔ $\mathrm{tr}A = \det A = 0$ (Cayley-Hamilton pour le sens direct de la dernière étape).

b) $\mathrm{tr}A^2 = (\mathrm{tr}A)^2 - 2\det A$ (somme des carrés des valeurs propres). Si $\mathrm{tr}A = 0$, alors $\mathrm{tr}A^2 = -2\det A$, d'où l'équivalence avec a).

c) tr $= a + d = 0$ et det $= ad - c = 0$, donc $d = -a$ et $c = -a^2$:

$$\begin{pmatrix}a&1\\-a^2&-a\end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{C}$$

— Vérification : le carré vaut $\begin{pmatrix}a^2-a^2&a-a\\-a^3+a^3&-a^2+a^2\end{pmatrix} = 0$ ✓.

Réponse. Nilpotente ⇔ $\mathrm{tr}A = \det A = 0$; matrices $\begin{pmatrix}a&1\\-a^2&-a\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : réduction complète d'une matrice 3 × 3

a) $\mathrm{tr}A = -1 = -1 - 1 + 1$, et on vérifie que 1 et -1 sont racines ;
$\det A = 0(0-2) - 1(0+2) - 1(-2-1) = -2 + 3 = 1 = (-1)^2 \times 1$ ✓.

b) $A + I = \begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$, de rang 2 : $E_{-1} = \mathbb{R}(1,0,1)$. $A - I$ donne $E_1 = \mathbb{R}(0,1,1)$ (en effet $A(0,1,1) = (0,1,1)$). N_{-1} est de dimension 2 : $N_{-1} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,1))$, car

$$(A+I)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

c) Base $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (0,1,1)$: $Av_1 = -v_1$, $Av_2 = v_1 - v_2$, $Av_3 = v_3$.
Réduite $J = \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^n = PJ^nP^{-1}$ avec $P = (v_1\ v_2\ v_3)$. La trace est invariante : $\mathrm{tr}A^n = 2(-1)^n + 1$.

Réponse. $E_{-1} = \mathbb{R}(1,0,1)$, $E_1 = \mathbb{R}(0,1,1)$; $A \sim J_2(-1) \oplus (1)$; $\mathrm{tr}A^n = 2(-1)^n + 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).