Plaquette 5 – Trigonalisation : problèmes de synthèse

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lecture sur une réduite de Jordan.

— $\chi_A = \prod (X-\lambda)^{m_\lambda}$ (somme des tailles des blocs de λ).

— $\pi_A = \prod (X-\lambda)^{k_\lambda}$ (k_λ = taille du plus grand bloc de λ).

— $\dim E_\lambda$ = nombre de blocs de λ.

— **Fonctions d'un bloc** : pour f polynomiale (ou somme de série entière), avec $N^2 = 0$:

$$f(J_2(\lambda)) = f(\lambda)I + f'(\lambda)N$$

— et pour $J_3(\lambda)$: $f(\lambda)I + f'(\lambda)N + \frac{f''(\lambda)}{2}N^2$.

— Si A et B commutent, elles sont cotrigonalisables : $\mathrm{Sp}(A+B) \subset \mathrm{Sp}A + \mathrm{Sp}B$.

Correction de l'exercice 1 – Cayley-Hamilton par trigonalisation

a) $Te_j \in F_j$ et la k-ième coordonnée de Te_k est t_k : $(T-t_kI)e_k \in F_{k-1}$, et pour $j<k$, $(T-t_kI)e_j \in F_j \subset F_{k-1}$.

b) Pour $k=1$: $(T-t_1I)e_1 = 0$. Si c'est vrai au rang $k-1$, alors pour $x \in F_k$: $(T-t_kI)x \in F_{k-1}$, puis le produit des $k-1$ premiers facteurs l'annule (les facteurs commutent).

c) Pour $k=n$: $\prod_{k=1}^{n}(T-t_kI) = 0$ sur $F_n = \mathbb{C}^n$, et ce produit est $\chi_T(T)$. Pour $A = PTP^{-1}$:

$$\chi_A(A) = P\chi_T(T)P^{-1} = 0$$

Réponse. $(T-t_kI)F_k \subset F_{k-1}$; le produit des n facteurs est nul : $\chi_A(A) = 0$.

Correction de l'exercice 2 – Polynôme minimal lu sur les blocs

a) $\chi_A = (X-1)^3(X-2)^3$ et π_A = ppcm des polynômes minimaux des blocs :

$$\pi_A = (X-1)^2(X-2)^3$$

b) $\dim E_1 = 2$ (deux blocs pour 1), $\dim E_2 = 1$, et $\mathrm{rg}(A-I) = 6-2 = 4$.

c) $\pi_{J_k(\lambda)} = (X-\lambda)^k$, donc l'exposant de $(X-\lambda)$ dans π_A est la taille du plus grand bloc de λ. π_A est à racines simples si et seulement si tous les blocs sont de taille 1, c'est-à-dire si la réduite est diagonale.

Réponse. $\chi_A = (X-1)^3(X-2)^3$, $\pi_A = (X-1)^2(X-2)^3$; $\dim E_1 = 2$, $\dim E_2 = 1$.

Correction de l'exercice 3 – Classes de similitude à polynôme caractéristique fixé

a) Pour 1 (multiplicité 2) : un bloc $J_2(1)$ ou deux blocs $J_1(1)$; pour 2 : un bloc. D'où 2 classes : $\mathrm{diag}(1,1,2)$ et $J_2(1) \oplus (2)$.

b) Les polynômes minimaux sont respectivement $(X-1)(X-2)$ et $(X-1)^2(X-2)$, différents.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Partitions de 3 : 3 classes, $I_3, J_2(1) \oplus (1), J_3(1)$, de polynômes minimaux

$$X-1, \qquad (X-1)^2, \qquad (X-1)^3$$

— En dimension ≤ 3, χ et π déterminent la classe ; ce n'est plus vrai en dimension 4 ($J_2(0) \oplus J_2(0)$ et $J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$ ont même $\chi = X^4$ et même $\pi = X^2$).

Réponse. 2 classes pour $(X-1)^2(X-2)$, 3 pour $(X-1)^3$; distinguées par π en dimension 3.

Correction de l'exercice 4 – Racine carrée d'une matrice unipotente

a) $R^2 = I + 2aN + (a^2+2b)N^2$. On identifie : $2a = 1$ et $a^2 + 2b = 0$, d'où $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{8}$:

$$R = I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$$

b) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$: mêmes coefficients. Le calcul est légitime car $N^3 = 0$ tue le reste.

c) $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérification du coefficient $(1,3)$ de R^2 : $-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0$ ✓.

Réponse. $R = I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$; ici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 – Logarithme d'une matrice unipotente

a) $L^2 = N^2 - N^3 + \frac{N^4}{4} = N^2$ et $L^3 = N^3 + \ldots = 0$.

b) $\exp(L) = I + L + \frac{L^2}{2} = I + N - \frac{N^2}{2} + \frac{N^2}{2}$, soit

$$\exp\left(N - \frac{N^2}{2}\right) = I + N$$

c) L est nilpotente (polynôme sans terme constant en N, qui commute avec N) et $\exp(L) = U$. Le même calcul, avec $\ln(1+x) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ tronqué à l'indice de nilpotence, vaut en toute dimension.

Réponse. $L^2 = N^2$, $L^3 = 0$; $\exp\left(N - \frac{N^2}{2}\right) = I + N$.

Correction de l'exercice 6 – Logarithme d'un bloc de Jordan

a) μI et $\frac{N}{\lambda}$ commutent, et $N^2 = 0$:

$$\exp\left(\mu I + \frac{N}{\lambda}\right) = \mathrm{e}^{\mu}\left(I + \frac{N}{\lambda}\right) = \lambda I + N$$

b) $B = \mu I + \frac{1}{\lambda}N$, par exemple pour $\lambda = 1$: $B = N$, et pour $\lambda = -1$: $B = i\pi I - N$.

c) $\det \exp(B) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}B} \neq 0$: une exponentielle est toujours inversible, alors que $J_2(0)$ ne l'est pas.

Réponse. $\exp\left(\mu I + \frac{N}{\lambda}\right) = J_2(\lambda)$; $J_2(0)$ non inversible n'est pas une exponentielle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Un bloc de Jordan semblable à son inverse

a) $N^2 = 0$: $J^{-1} = I - N$.

b) Avec $Q = \mathrm{diag}(1, -1)$: $QNQ^{-1} = -N$, donc $Q(I+N)Q^{-1} = I - N$:

$$J^{-1} = QJQ^{-1}$$

c) Sur un bloc, $J_k(\lambda)^{-1} = \lambda^{-1}(I + \lambda^{-1}N)^{-1} = \lambda^{-1}I + M$ avec M nilpotente d'indice k (polynôme en N de terme dominant $-\lambda^{-2}N$), donc semblable à $J_k(\lambda^{-1})$. Ainsi la réduite de A^{-1} s'obtient en remplaçant chaque bloc $J_k(\lambda)$ par $J_k(\lambda^{-1})$; $A \sim A^{-1}$ si et seulement si cette transformation préserve la liste des blocs.

Réponse. $J^{-1} = I - N = QJQ^{-1}$; les blocs de A^{-1} sont les $J_k(\lambda^{-1})$.

Correction de l'exercice 8 – Spectre d'une somme de matrices qui commutent

a) A et B sont cotrigonalisables : dans une base commune, $A + B$ est triangulaire de diagonale $(\lambda_i + \mu_i)$.

b) A et A^2 commutent, de valeurs propres 1 et 1 : $\mathrm{Sp}(A + A^2) = \{2\}$. Directement, $A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\mathrm{Sp}E_{12} = \mathrm{Sp}E_{21} = \{0\}$, mais

$$E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Sp} = \{1, -1\} \not\subset \{0\}$$

Réponse. Cotrigonalisation : $\mathrm{Sp}(A+B) = \{\lambda_i + \mu_i\}$; $\mathrm{Sp}(A + A^2) = \{2\}$; faux sans commutation.

Correction de l'exercice 9 – Récurrence linéaire à racine triple

a) $\chi_C = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3$. Une matrice compagnon vérifie $\pi_C = \chi_C$, donc un seul bloc : $C \sim J_3(1)$.

b) $C^n = P(I + nN + \binom{n}{2}N^2)P^{-1}$: les coefficients de C^n sont des polynômes en n de degré ≤ 2, donc u_n aussi.

c) $u_n = a + bn + cn^2$ avec $u_0 = a = 0$, $u_1 = b + c = 1$, $u_2 = 2b + 4c = 4$, d'où $c = 1$, $b = 0$:

$$u_n = n^2$$

— Vérification : $u_3 = 3 \times 4 - 3 \times 1 + 0 = 9$ ✓.

Réponse. $C \sim J_3(1)$; u_n polynomial de degré ≤ 2 ; $u_n = n^2$.

Correction de l'exercice 10 – Matrices compagnons : un bloc par valeur propre

a) Pour C de sous-diagonale formée de 1, on supprime la première ligne et la dernière colonne : il reste une matrice triangulaire de diagonale $(1, \ldots, 1)$, de déterminant 1. Un mineur d'ordre $n-1$ non nul donne $\mathrm{rg}(C - \lambda I) \geq n - 1$.

b) Pour λ valeur propre, $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}(C - \lambda I) \leq 1$, donc $= 1$: un seul bloc de Jordan par valeur propre.

c) C diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_\lambda = m_\lambda$ pour tout $\lambda \Leftrightarrow$ toutes les multiplicités valent 1 (et P

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

scindé) :

$$C \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow P \text{ scindé à racines simples}$$

Réponse. $\operatorname{rg}(C-\lambda I) \geq n-1$: $\dim E_\lambda = 1$; diagonalisable ssi P scindé à racines simples.

Correction de l'exercice 11 – Nilpotence et adhérence de la classe de similitude

a) Le coefficient (i,j) de $Q_t^{-1}TQ_t$ vaut $t^{j-i}t_{ij}$, avec $j>i$ pour les coefficients non nuls : il tend vers 0 :

$$Q_t^{-1}TQ_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

b) A nilpotente est semblable à une triangulaire stricte T ; les matrices $Q_t^{-1}TQ_t$ sont dans $C(A)$ et tendent vers 0.

c) Si $P_kAP_k^{-1} \to 0$, alors $\chi_A = \chi_{P_kAP_k^{-1}} \to \chi_0 = X^n$ (les coefficients de χ_M sont continus en M). La suite constante χ_A a pour limite X^n, donc $\chi_A = X^n$ et A est nilpotente.

Réponse. $Q_t^{-1}TQ_t \to 0$; A nilpotente $\Leftrightarrow 0 \in \overline{C(A)}$.

Correction de l'exercice 12 – Fonctions d'un bloc de Jordan

a) $f(X) = \sum_k \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k$, et $(J-\lambda I)^k = N^k = 0$ pour $k \geq 2$:

$$f(J) = f(\lambda)I + f'(\lambda)N$$

b) $f = X^n$: $J^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}N$. Par passage à la limite dans les sommes partielles de l'exponentielle (avec $f' = f$) : $\exp(J) = \mathrm{e}^\lambda(I+N)$.

c) $f(J)$ a pour seule valeur propre $f(\lambda)$; elle est diagonalisable si et seulement si elle est scalaire, c'est-à-dire $f'(\lambda) = 0$. Par exemple $f = (X-\lambda)^2$ donne $f(J) = 0$.

Réponse. $f(J) = f(\lambda)I + f'(\lambda)N$; diagonalisable ssi $f'(\lambda) = 0$.

Correction de l'exercice 13 – La dérivation sur un espace de fonctions

a) $Df_1 = f_1$, $Df_2 = f_1 + f_2$, $Df_3 = 2f_2 + f_3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\chi_M = (X-1)^3$ et $\operatorname{rg}(M-I) = 2$: $M \sim J_3(1)$ (base f_1, f_2, $\frac{1}{2}f_3$).

c) $(D-\mathrm{id})f = f_2$. Comme $(D-\mathrm{id})f_3 = 2f_2$ et $\ker(D-\mathrm{id}) = \mathbb{R}f_1$: $f = \frac{1}{2}f_3 + cf_1$, soit $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\mathrm{e}^x$. Vérification : $f' - f = x\mathrm{e}^x$ ✓.

Réponse. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim J_3(1)$; $f = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\mathrm{e}^x$.

Correction de l'exercice 14 – Commutant d'une réduite de Jordan simple

a) $N_\lambda = \ker(A-\lambda I)^2$ et $N_\mu = \ker(A-\mu I)$ sont des noyaux de polynômes en A, stables par tout X qui commute avec A.

b) $X = \operatorname{diag}(X_1, x_3)$ avec X_1 commutant avec $J_2(\lambda)$, donc avec N : $X_1 = aI + bN$. D'où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \dim = 3$$

c) $\pi_A = (X-\lambda)^2(X-\mu) = \chi_A$, de degré 3 : $\dim \mathbb{C}[A] = 3$, et $\mathbb{C}[A]$ est inclus dans le commutant, de même dimension : égalité.

Réponse. $X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$; commutant = $\mathbb{C}[A]$, dimension 3.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : valeur propre triple et rang 1

a) $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$: lignes égales, rang 1, trace $1+1-2=0$. Donc $N^2 = \operatorname{tr}(N)N = 0$, $\chi_A = (X-2)^3$ et $\pi_A = (X-2)^2$.

b) $\dim E_2 = 3-1 = 2$: deux blocs, $A \sim J_2(2) \oplus (2)$.

c) Binôme avec $N^2 = 0$:

$$A^n = 2^n I + n 2^{n-1} N, \qquad \exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}(I + tN)$$

— et la formule de A^n vaut pour $n = -1$: $A^{-1} = \frac{1}{2}I - \frac{1}{4}N$ (vérification : $(2I+N)\left(\frac{1}{2}I - \frac{1}{4}N\right) = I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N = I$ ✓).

d) $v_2 = e_1$ ($Ne_1 = (1,1,1) \neq 0$), $v_1 = Ne_1 = (1,1,1)$, et $v_3 \in \ker N = \{x+y-2z=0\}$ indépendant de v_1, par exemple $(1,-1,0)$.

Réponse. $N^2 = 0$, $\pi_A = (X-2)^2$, $A \sim J_2(2) \oplus (2)$; $A^n = 2^n I + n 2^{n-1} N$, $\exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}(I+tN)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).