Plaquette 3 – Endomorphismes nilpotents

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Un endomorphisme u est **nilpotent** s'il existe k avec $u^k = 0$; le plus petit tel k est son **indice**. En dimension n, l'indice est au plus n, le spectre est $\{0\}$ et $\chi_u = X^n$ (sur $\mathbb{C}$). Pour **classer** les nilpotents à similitude près, on utilise la suite des rangs $r_k = \mathrm{rg} u^k$: le nombre de blocs de Jordan de taille $\geq k$ vaut $r_{k-1} - r_k$. Les nilpotents interviennent partout : $\mathrm{id} - u$ est inversible d'inverse polynomial, $\exp(u)$ est une somme finie, et la partie nilpotente de Dunford gouverne les termes polynomiaux ($n\lambda^{n-1}$, $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$).

Exercice 1 – L'indice de nilpotence est au plus n

Soit u nilpotent d'indice p sur E de dimension n, et x tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

a) Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.

b) En déduire $p \leq n$ et $u^n = 0$.

c) Si $p = n$, écrire la matrice de u dans la base $(u^{n-1}(x), \ldots, u(x), x)$.

Exercice 2 – Caractérisations de la nilpotence

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si A est nilpotente, $\mathrm{Sp} A = \{0\}$.

b) Montrer la réciproque à l'aide de la trigonalisation ou de Cayley-Hamilton.

c) Sur $\mathbb{R}$, une matrice dont la seule valeur propre réelle est 0 est-elle nilpotente ? Contre-exemple.

Exercice 3 – Somme et produit de nilpotents

a) Soit u, v nilpotents d'indices p, q qui commutent. Montrer que $u + v$ est nilpotent, d'indice au plus $p + q - 1$, et que uv est nilpotent.

b) Montrer que $E_{12} + E_{21} \in M_2(\mathbb{R})$ n'est pas nilpotente, bien que E_{12} et E_{21} le soient.

c) En déduire que l'ensemble des matrices nilpotentes n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 4 – Inverse de id - u

Soit u nilpotent d'indice p.

a) Montrer que $\mathrm{id} - u$ est inversible et que $(\mathrm{id} - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$.

b) Plus généralement, montrer que $\lambda\,\mathrm{id} + u$ est inversible pour tout $\lambda \neq 0$.

c) Calculer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Noyau et image d'un nilpotent

Soit u nilpotent non nul sur E.

a) Montrer que $\ker u \cap \mathrm{Im} u \neq \{0\}$.

b) En déduire que $E \neq \ker u \oplus \mathrm{Im} u$, et que u n'est pas diagonalisable.

c) Montrer que si $u^2 = 0$, alors $\mathrm{Im} u \subset \ker u$ et $\mathrm{rg} u \leq \frac{n}{2}$. Cas d'égalité pour $n = 4$?

Exercice 6 – Lire les blocs de Jordan sur les rangs

Soit N nilpotente de taille n et $r_k = \mathrm{rg} N^k$ ($r_0 = n$).

a) Pour $N = J_m(0)$, calculer r_k. En déduire, pour une réduite de Jordan quelconque, que le nombre de blocs de taille $\geq k$ vaut $r_{k-1} - r_k$.

b) Une matrice nilpotente 4×4 a pour rangs $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$. Déterminer ses blocs de Jordan.

c) Même question avec $r_1 = 2$, $r_2 = 0$.

Exercice 7 – Classes de similitude de nilpotents

a) Montrer qu'il y a exactement 3 classes de similitude de matrices nilpotentes dans $M_3(\mathbb{C})$, et en donner des représentants.

b) Combien y en a-t-il dans $M_4(\mathbb{C})$? (Utiliser les partitions de 4.)

c) Montrer que deux nilpotentes de $M_3(\mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même rang.

Exercice 8 – Lemme de Jacobson

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $C = AB - BA$. On suppose que C commute avec A.

a) Montrer que $C^k = C^{k-1}AB - C^{k-1}BA$ pour $k \geq 1$.

b) En déduire $\mathrm{tr}(C^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$ (utiliser $C^{k-1}A = AC^{k-1}$ et $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$).

c) Conclure que C est nilpotente.

Exercice 9 – Déterminant et perturbation nilpotente

Soit N nilpotente et B qui commute avec N, dans $M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que N et B sont cotrigonalisables (admis, ou par vecteur propre commun).

b) En déduire $\det(B + N) = \det B$ et $\chi_{B+N} = \chi_B$.

c) Montrer que l'hypothèse de commutation est nécessaire, avec $B = E_{12}$ et $N = E_{21}$.

Exercice 10 – Exponentielle d'un nilpotent

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer N^2, N^3 et $\exp(N)$.

b) Montrer que $\exp(N)$ est unipotente ($\exp(N) - I$ nilpotente) et calculer son inverse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer $\exp(tN)$ et vérifier que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tN) = N\exp(tN)$.

Exercice 11 – Nilpotents de rang 1

Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1, $N = UV^{\mathsf{T}}$.

a) Montrer que N est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}N = V^{\mathsf{T}}U = 0$, et qu'alors $N^2 = 0$.
b) Montrer que deux nilpotentes de rang 1 sont semblables.
c) Donner une matrice 3×3 nilpotente de rang 1 sans coefficient nul.

Exercice 12 – Nilpotents qui commutent avec une diagonale

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ à coefficients **distincts**, et N nilpotente avec $DN = ND$.

a) Montrer que N est diagonale.
b) En déduire $N = 0$.
c) Que se passe-t-il si $D = \lambda I$?

Exercice 13 – Sous-espace de matrices nilpotentes

a) Montrer que l'ensemble T_n^+ des matrices triangulaires supérieures strictes est un sous-espace de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ formé de nilpotentes.

b) Montrer qu'une matrice symétrique réelle nilpotente est nulle. En déduire que si $V \subset M_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace formé de nilpotentes, alors $V \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

c) En déduire $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 14 – Un nilpotent cyclique

Soit u nilpotent d'indice $n = \dim E$.

a) Montrer que $\dim\ker u^k = k$ pour $0 \leq k \leq n$.
b) En déduire que les seuls sous-espaces stables par u sont les $\ker u^k$.
c) Combien u a-t-il de sous-espaces stables ?

Exercice 15 – Synthèse : deux nilpotentes de même rang

Soit $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer N_1^2, N_1^3 et N_2^2. En déduire que les deux sont nilpotentes.
b) Calculer $\mathrm{rg}N_1$, $\mathrm{rg}N_1^2$, $\mathrm{rg}N_2$.
c) Déterminer les réduites de Jordan. N_1 et N_2 sont-elles semblables ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).