Plaquette 4 – Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford en pratique

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour obtenir la décomposition de Dunford $A = D + N$ sans base de Jordan, on calcule les **projecteurs spectraux** p_λ sur les sous-espaces caractéristiques $N_\lambda = \ker(A - \lambda I)^{m_\lambda}$: ce sont des **polynômes en** A fournis par une relation de **Bézout** entre les facteurs $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ de χ_A. Alors $D = \sum \lambda p_\lambda$ et $N = A - D$. On vérifie toujours $DN = ND$ et N nilpotente. Piège classique : pour une matrice triangulaire, la partie diagonale **n'est pas** en général la partie D de Dunford.

Exercice 1 – Dunford pour une valeur propre double en taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer χ_A.

b) Donner la décomposition de Dunford de A.

c) En déduire A^n et $\exp(tA)$.

Exercice 2 – Projecteurs spectraux par Bézout

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(X-1)^2(X-3)$.

a) Trouver a et b, c tels que $a(X-1)^2 + (bX+c)(X-3) = 1$.

b) En déduire $p_3 = \frac{1}{4}(A-I)^2$ et $p_1 = I - p_3$, et les calculer.

c) Calculer $D = p_1 + 3p_3$ et $N = A - D$; vérifier $N^2 = 0$ et $DN = ND$.

Exercice 3 – Le piège de la matrice triangulaire

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta = \mathrm{diag}(1,1,2)$ et $S = T - \Delta$.

a) Montrer que $\Delta S \neq S\Delta$: $T = \Delta + S$ n'est pas la décomposition de Dunford.

b) Vérifier $(X-1)^2 - X(X-2) = 1$ et en déduire le projecteur $p_2 = (T-I)^2$.

c) Calculer la vraie décomposition $T = D + N$.

Exercice 4 – Unicité de la décomposition de Dunford

Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford, avec D et N polynômes en A, et $A = D' + N'$ une autre décomposition (D' diagonalisable, N' nilpotente, $D'N' = N'D'$).

a) Montrer que D' et N' commutent avec A, donc avec D et N.

b) Montrer que $D - D'$ est diagonalisable et que $N' - N$ est nilpotente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Conclure.

Exercice 5 – Puissances par Dunford

On reprend A de l'exercice sur les projecteurs spectraux, avec $D = p_1 + 3p_3$, $N = A - D$, $N^2 = 0$.

a) Montrer que $Np_1 = N$ et $Np_3 = 0$.

b) En déduire $A^n = p_1 + 3^n p_3 + nN$.

c) Vérifier pour $n = 1$ et calculer le coefficient $(2, 3)$ de A^n.

Exercice 6 – Exponentielle par Dunford

Avec les mêmes notations ($A = D + N$, $D = p_1 + 3p_3$, $N^2 = 0$, $Np_3 = 0$) :

a) Justifier $\exp(tA) = \exp(tD)\exp(tN)$.

b) Montrer que $\exp(tA) = \mathrm{e}^t(p_1 + tN) + \mathrm{e}^{3t}p_3$.

c) En déduire la solution de $X' = AX$ avec $X(0) = (1, 0, 1)$ (vecteur propre de A pour 1).

Exercice 7 – Dunford et similitude

Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford et P inversible.

a) Montrer que la décomposition de Dunford de PAP^{-1} est $PDP^{-1} + PNP^{-1}$.

b) En déduire que si A est réelle et χ_A scindé sur $\mathbb{R}$, alors D et N sont réelles.

c) Montrer que deux matrices semblables ont des parties diagonalisables semblables. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8 – Dimension des sous-espaces caractéristiques

Soit u à polynôme caractéristique scindé, λ valeur propre de multiplicité m, et $N_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})^m$.

a) Montrer que N_λ est stable et que l'induit u_λ a pour seule valeur propre λ.

b) En déduire, à l'aide de la décomposition $E = \bigoplus N_\mu$ et de $\chi_u = \prod \chi_{u_\mu}$, que $\dim N_\lambda = m$.

c) Montrer que la suite $\ker(u - \lambda\,\mathrm{id})^k$ stationne dès $k =$ indice de nilpotence de $u_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}$, qui est $\leq m$.

Exercice 9 – Diagonalisable ou nilpotente : lecture sur Dunford

Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford.

a) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $N = 0$, et nilpotente si et seulement si $D = 0$.

b) Montrer que $\chi_A = \chi_D$ et que A et D ont les mêmes valeurs propres avec multiplicités.

c) Application : donner D et N pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Système différentiel non diagonalisable

Résoudre $x' = 3x + y$, $y' = -x + y$ avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

a) Écrire A et sa décomposition de Dunford.

b) Calculer $\exp(tA)$.

c) En déduire $x(t)$ et $y(t)$, et vérifier l'équation différentielle.

Exercice 11 – Récurrence à racine double

On considère $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.

a) Écrire $U_{n+1} = CU_n$ et la décomposition de Dunford de C.

b) En déduire que $u_n = (a + bn)2^n$.

c) Déterminer a et b et vérifier u_2.

Exercice 12 – Convergence vers 0 sans diagonalisabilité

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^n par Dunford.

b) Montrer que $A^n \to 0$ bien que $\|A\|_\infty = \frac{3}{2} > 1$.

c) Énoncer le résultat général : si $\rho(A) < 1$, alors $A^n \to 0$.

Exercice 13 – Partie diagonalisable comme polynôme en A

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Écrire D_A comme polynôme en A (de degré ≤ 1).

b) Écrire D_B comme polynôme en B (utiliser $p_2 = (B - I)^2$ et $p_1 = I - p_2$).

c) Vérifier dans les deux cas que D commute avec la matrice.

Exercice 14 – Exponentielle d'une matrice non diagonalisable de taille 3

Soit $J = J_3(\lambda) = \lambda I + N$.

a) Calculer $\exp(tJ)$.

b) En déduire les solutions de $X' = JX$.

c) Application : solution de $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ (polynôme caractéristique $(r-1)^3$).

Exercice 15 – Synthèse : Dunford complet d'une matrice 3 × 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(X+1)^2(X-1)$.

a) Établir $\frac{1}{4}(X+1)^2 - \frac{X+3}{4}(X-1) = 1$ et en déduire $p_1 = \frac{1}{4}(A+I)^2$, $p_{-1} = I - p_1$.

b) Calculer $D = p_1 - p_{-1}$ et $N = A - D$, et vérifier $N^2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $A^n = (-1)^n p_{-1} + n(-1)^{n-1} N + p_1$ et vérifier pour $n = 2$.
d) Calculer $\exp(tA)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).