Plaquette 1 – Trigonalisation, sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On trigonalise une matrice dont le polynôme caractéristique est **scindé**, on construit les **sous-espaces caractéristiques**, on écrit la décomposition $A = D + N$ de **Dunford**, et on s'en sert pour calculer puissances et exponentielle.

Exercice 1 – Trigonalisabilité

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2 – Trigonaliser une matrice 2x2

Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Sous-espace caractéristique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer E_2, N_2 et vérifier $\dim N_2 = m_2$.

Exercice 4 – Décomposition de Dunford

Écrire la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Nilpotence et trace

Soit N nilpotente. Montrer que $\operatorname{tr}\left(N^k\right) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Exercice 6 – Trigonalisation 3x3

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et donner son indice de nilpotence $N = A - I$.

Exercice 7 – Matrices semblables

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Puissances via Dunford

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n puis $\lim_{n \to +\infty} \frac{A^n}{3^n}$ (coefficient par coefficient).

Exercice 9 – Exponentielle de matrice

Calculer $\exp(tA)$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 – Trace et valeurs propres complexes

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{tr}(A) = 1$, $\operatorname{tr}\left(A^2\right) = 5$ et $\det A = -2$. Déterminer χ_A.

Exercice 11 – Trigonalisation et sous-espaces stables

Montrer qu'un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ admet toujours une droite stable, puis en déduire la trigonalisabilité par récurrence.

Exercice 12 – Spectre d'un polynôme en A par trigonalisation

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (avec multiplicité) et $P \in \mathbb{C}[X]$.

a) Montrer que $\chi_{P(A)} = \prod_{i=1}^{n} (X - P(\lambda_i))$.

b) En déduire $\operatorname{tr}(A^k) = \sum \lambda_i^k$ et $\det P(A) = \prod P(\lambda_i)$.

c) Application : $A \in M_3(\mathbb{R})$ a pour valeurs propres 1, i, $-i$. Calculer $\operatorname{tr}(A^2)$, $\operatorname{tr}(A^4)$ et $\det(A^2 + I)$.

Exercice 13 – Une fausse décomposition de Dunford

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A = D' + N'$ avec D' diagonalisable et N' nilpotente. Calculer $D'N'$ et $N'D'$.

b) Déterminer la vraie décomposition de Dunford de A.

c) Calculer A^2 et comparer avec le binôme appliqué (à tort) à $D' + N'$.

Exercice 14 – Matrices trigonalisables sur R

a) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais pas diagonalisable, et la trigonaliser.

c) Montrer qu'une matrice réelle dont toutes les valeurs propres complexes sont réelles est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : réduction complète

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) Trigonaliser A et en déduire A^n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).