Plaquette 2 – Trigonalisation pratique et réduites de Jordan en dimension 3

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour trigonaliser effectivement, on construit une base **adaptée** : pour une valeur propre λ avec $\dim E_\lambda < m_\lambda$, on choisit un vecteur propre v_1, puis on résout $(A-\lambda I)v_2 = v_1$ (« vecteur propre généralisé »), et ainsi de suite. On obtient la **réduite de Jordan**, triangulaire avec des 1 sur la sur-diagonale. En dimension ≤ 3, la classe de similitude d'une matrice à χ_A scindé est entièrement déterminée par χ_A et les **rangs** des $A-\lambda I$; c'est le moyen le plus rapide de décider si deux matrices sont semblables.

Exercice 1 – Trigonaliser une matrice 2 × 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer χ_A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) Trouver un vecteur propre v_1 puis v_2 tel que $(A-3I)v_2 = v_1$.

c) Écrire P et $P^{-1}AP$.

Exercice 2 – Valeur propre double et valeur propre simple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\chi_A = (X-1)^2(X-3)$ (contrôler trace et déterminant).

b) Déterminer E_1 et E_3. A est-elle diagonalisable ?

c) Trouver une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Un bloc de Jordan de taille 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2I$.

a) Calculer N^2 et N^3. En déduire χ_A et π_A.

b) Construire une base (v_1, v_2, v_3) avec $Nv_1 = 0$, $Nv_2 = v_1$, $Nv_3 = v_2$.

c) Écrire la réduite de Jordan de A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Valeur propre triple, deux blocs

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\operatorname{rg}(A - I) = 1$ et que $(A - I)^2 = 0$.

b) En déduire χ_A, π_A et $\dim E_1$.

c) Donner la réduite de Jordan et une base associée.

Exercice 5 – Lesquelles sont semblables ?

On considère $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que les trois ont pour polynôme caractéristique $(X - 1)^3$.

b) Calculer $\operatorname{rg}(A_i - I)$.

c) Conclure sur les similitudes.

Exercice 6 – Une matrice nilpotente 3 × 3

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que N est nilpotente et déterminer son indice.

b) Trouver x tel que (N^2x, Nx, x) soit une base, et écrire la matrice de N dans cette base.

c) Montrer que N est semblable à une matrice triangulaire stricte, et que réciproquement toute matrice triangulaire stricte est nilpotente.

Exercice 7 – Trigonalisation en base orthonormée

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(\chi_B = (X - 2)^2)$.

a) Trouver un vecteur propre unitaire u_1 et le compléter en une base orthonormée (u_1, u_2).

b) Écrire la matrice de B dans cette base.

c) Énoncer le résultat général (théorème de Schur réel) : si χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable en base orthonormée.

Exercice 8 – Puissances d'un bloc de Jordan

Soit $J = J_3(2) = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^n pour $n \geq 2$.

b) Pour $A = PJP^{-1}$ (matrice de l'exercice sur le bloc de taille 3), exprimer A^n en fonction de I, $A - 2I$ et $(A - 2I)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer A^3 par cette formule et vérifier un coefficient.

Exercice 9 – Un bloc de Jordan est semblable à sa transposée

Soit $J = J_k(\lambda)$ et K la matrice antidiagonale ($Ke_i = e_{k+1-i}$).

a) Calculer K^{-1} et KJK^{-1}.

b) En déduire que J est semblable à J^{T}.

c) En admettant la réduction de Jordan, montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 10 – Valeurs propres de la comatrice

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

a) Rappeler la relation entre A et sa comatrice $\mathrm{com}A$, et en déduire $\mathrm{com}(A)^{\mathsf{T}} = \det(A)A^{-1}$.

b) En trigonalisant A, déterminer les valeurs propres de $\mathrm{com}A$.

c) Application : A de valeurs propres 1, 2, 3. Donner les valeurs propres, la trace et le déterminant de $\mathrm{com}A$.

Exercice 11 – Commutant d'un bloc de Jordan

Soit $N = J_3(0)$ et $X \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $XN = NX$.

a) Montrer que X est déterminée par Xe_3 (on a $Ne_3 = e_2$, $Ne_2 = e_1$, $Ne_1 = 0$).

b) En écrivant $Xe_3 = ae_3 + be_2 + ce_1$, montrer que $X = aI + bN + cN^2$.

c) En déduire le commutant de $J_3(\lambda)$ et sa dimension.

Exercice 12 – Méthode : trigonaliser par récurrence

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que e_1 est vecteur propre. Écrire A par blocs $\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

b) Diagonaliser le bloc B.

c) En déduire une base dans laquelle A est triangulaire, puis conclure que A est même diagonalisable.

Exercice 13 – Matrices de $M_2(\mathbb{C})$ à un seul vecteur propre

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

a) Montrer que A a une unique valeur propre λ et que $\dim E_\lambda = 1$.

b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \frac{\mathrm{tr}A}{2}$.

c) En déduire que deux matrices non diagonalisables de $M_2(\mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Trace nulle et nilpotence en taille 2

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}A = 0$ et $\det A = 0$.

b) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^2 = 0$.

c) Donner toutes les matrices nilpotentes de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 15 – Synthèse : réduction complète d'une matrice 3 × 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\chi_A = (X+1)^2(X-1)$.

b) Déterminer E_{-1}, E_1 et le sous-espace caractéristique $N_{-1} = \ker(A+I)^2$.

c) Trouver une base de Jordan et la réduite.

d) En déduire A^n sous la forme PJ^nP^{-1} et calculer $\mathrm{tr}A^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).