Plaquette 5 – Trigonalisation : problèmes de synthèse

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La trigonalisation sert surtout de **démonstration** : elle ramène une question sur une matrice quelconque (de $M_n(\mathbb{C})$) à une question sur une matrice triangulaire, où valeurs propres, trace, déterminant et polynômes se lisent sur la diagonale. La réduction de Jordan affine le résultat : elle donne le polynôme minimal (plus grand bloc par valeur propre), le nombre de classes de similitude, et permet de définir des **fonctions de matrices** (racine carrée, logarithme, exponentielle) par développement limité sur la partie nilpotente.

Exercice 1 – Cayley-Hamilton par trigonalisation

Soit T triangulaire supérieure de diagonale $(t_1, \dots, t_n)$ et $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

a) Montrer que $(T - t_k I)(F_k) \subset F_{k-1}$.

b) En déduire par récurrence que $(T - t_1 I)\cdots(T - t_k I)$ s'annule sur F_k.

c) Conclure que $\chi_T(T) = 0$, puis que $\chi_A(A) = 0$ pour toute $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2 – Polynôme minimal lu sur les blocs

Soit A semblable à $\mathrm{diag}(J_2(1), J_1(1), J_3(2))$.

a) Donner χ_A et π_A.

b) Donner $\dim E_1$, $\dim E_2$ et $\mathrm{rg}(A - I)$.

c) Énoncer la règle générale et en déduire que A est diagonalisable si et seulement si tous ses blocs sont de taille 1.

Exercice 3 – Classes de similitude à polynôme caractéristique fixé

a) Combien y a-t-il de classes de similitude dans $M_3(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $(X-1)^2(X-2)$? Donner des représentants.

b) Montrer qu'elles sont distinguées par le polynôme minimal.

c) Même question pour $(X-1)^3$.

Exercice 4 – Racine carrée d'une matrice unipotente

Soit N nilpotente avec $N^3 = 0$.

a) Chercher $R = I + aN + bN^2$ telle que $R^2 = I + N$.

b) Comparer avec le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2.

c) Application : racine carrée de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Logarithme d'une matrice unipotente

Soit N avec $N^3 = 0$ et $L = N - \frac{N^2}{2}$ (début de la série de $\ln(1+x)$).

a) Calculer L^2 et L^3.

b) Montrer que $\exp(L) = I + N$.

c) En déduire que toute matrice unipotente $U = I + N$ ($N^3 = 0$) est l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

Exercice 6 – Logarithme d'un bloc de Jordan

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et μ tel que $e^{\mu} = \lambda$.

a) Calculer $\exp\left(\mu I + \frac{1}{\lambda}N\right)$ pour $N = E_{12} \in M_2(\mathbb{C})$.

b) En déduire une matrice B telle que $\exp(B) = J_2(\lambda)$.

c) Pourquoi $J_2(0)$ n'est-il l'exponentielle d'aucune matrice ?

Exercice 7 – Un bloc de Jordan semblable à son inverse

Soit $J = J_2(1) = I + N$.

a) Calculer J^{-1}.

b) Montrer que J^{-1} est semblable à J (conjuguer par $\mathrm{diag}(1, -1)$).

c) Montrer plus généralement qu'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et A^{-1} ont des réduites de Jordan qui se correspondent par $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$, et en déduire que $A \sim A^{-1}$ si et seulement si le multiensemble des blocs est invariant par $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$.

Exercice 8 – Spectre d'une somme de matrices qui commutent

a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer qu'il existe un ordre des valeurs propres λ_i de A et μ_i de B tel que $\mathrm{Sp}(A+B) = \{\lambda_i + \mu_i\}$.

b) En déduire $\mathrm{Sp}(A + A^2)$ pour $A = J_2(1)$.

c) Montrer que le résultat est faux sans commutation, avec $A = E_{12}$ et $B = E_{21}$.

Exercice 9 – Récurrence linéaire à racine triple

On considère $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$.

a) Montrer que la matrice compagnon C a pour polynôme caractéristique $(X-1)^3$ et pour réduite $J_3(1)$.

b) En déduire que u_n est un polynôme en n de degré au plus 2.

c) Déterminer u_n et vérifier u_3.

Exercice 10 – Matrices compagnons : un bloc par valeur propre

Soit C la matrice compagnon d'un polynôme unitaire P de degré n.

a) Montrer que la sous-matrice de $C - \lambda I$ obtenue en supprimant une ligne et une colonne convenables est triangulaire à diagonale de 1, et en déduire $\mathrm{rg}(C - \lambda I) \geq n - 1$.

b) En déduire que chaque sous-espace propre de C est une droite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Conclure : C est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

Exercice 11 – Nilpotence et adhérence de la classe de similitude

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $C(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.

a) Soit T triangulaire supérieure stricte et $Q_t = \mathrm{diag}(1, t, \dots, t^{n-1})$. Calculer $Q_t^{-1} T Q_t$ et sa limite quand $t \to 0$.

b) En déduire que si A est nilpotente, $0 \in \overline{C(A)}$.

c) Réciproquement, montrer que si $0 \in \overline{C(A)}$, alors $\chi_A = X^n$ (continuité de $M \mapsto \chi_M$).

Exercice 12 – Fonctions d'un bloc de Jordan

Soit $J = J_2(\lambda) = \lambda I + N$.

a) Montrer que $f(J) = f(\lambda) I + f'(\lambda) N$ pour tout polynôme f (formule de Taylor).

b) Retrouver J^n et $\exp(J)$.

c) Pour quels polynômes f la matrice $f(J)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 13 – La dérivation sur un espace de fonctions

Soit $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1(x) = \mathrm{e}^x$, $f_2(x) = x\mathrm{e}^x$, $f_3(x) = x^2\mathrm{e}^x$, et $D : f \mapsto f'$.

a) Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans (f_1, f_2, f_3).

b) Déterminer la réduite de Jordan de D.

c) Résoudre dans E l'équation $f' - f = x\mathrm{e}^x$.

Exercice 14 – Commutant d'une réduite de Jordan simple

Soit $A = \mathrm{diag}(J_2(\lambda), (\mu))$ avec $\lambda \neq \mu$.

a) Montrer qu'une matrice X commutant avec A laisse stables $N_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $N_\mu = \mathbb{C}e_3$.

b) En déduire la forme de X et la dimension du commutant.

c) Vérifier que $\pi_A = \chi_A$ et que le commutant est $\mathbb{C}[A]$.

Exercice 15 – Synthèse : valeur propre triple et rang 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $N = A - 2I$ est de rang 1 et de trace nulle. En déduire $N^2 = 0$, χ_A et π_A.

b) Déterminer $\dim E_2$ et la réduite de Jordan.

c) Calculer A^n, A^{-1} et $\exp(tA)$.

d) Trouver une base de Jordan.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).