Plaquette 3 – Conditionnement, formule de Bayes et indépendance

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilités composées. $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

Probabilités totales et Bayes. Pour un système complet (B_k) :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A \mid B_k), \qquad \mathbb{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A \mid B_j)}{\sum_k \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A \mid B_k)}$$

Indépendance mutuelle. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$ pour toute partie finie I ; elle se conserve en remplaçant certains A_i par leurs complémentaires.

Correction de l'exercice 1 – La ruine du joueur équitable

a) Probabilités totales selon l'issue de la première partie : partant de k, on se retrouve en $k+1$ ou $k-1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$, et l'avenir ne dépend que de la fortune actuelle.

b) $u_{k+1} - u_k = u_k - u_{k-1}$: la suite est arithmétique, et les conditions aux bords donnent

$$u_k = 1 - \frac{k}{N}$$

c) $N = 1000$, $k = 10$: $u_{10} = 0{,}99$. Même équitable, le jeu ruine presque toujours le joueur le moins riche.

Réponse. $u_k = 1 - \frac{k}{N}$; ici 0,99.

Correction de l'exercice 2 – L'urne de Pólya

a) Probabilités composées : $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

b) Au j-ième tirage l'urne contient $j+1$ boules. Les numérateurs successifs des blanches sont $1, 2, \ldots, k$ et ceux des noires $1, \ldots, n-k$, quel que soit l'ordre :

$$\frac{k!(n-k)!}{2\cdot 3\cdots(n+1)} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

c) Il y a $\binom{n}{k}$ ordres possibles : $\binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

Réponse. $\mathbb{P}(n \text{ blanches}) = \frac{1}{n+1}$; le nombre de blanches est uniforme sur $\{0, \ldots, n\}$.

Correction de l'exercice 3 – Fiabilité d'un test de dépistage

a) Bayes avec le système complet (malade, sain) :

$$\mathbb{P}(M \mid +) = \frac{0{,}001 \times 0{,}99}{0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}02} = \frac{0{,}00099}{0{,}02097} \approx 0{,}047$$

b) $\mathbb{P}(++ \mid M) = 0{,}99^2$ et $\mathbb{P}(++ \mid S) = 0{,}02^2$, d'où $\mathbb{P}(M \mid ++) = \frac{0{,}0009801}{0{,}0009801 + 0{,}0003996} \approx 0{,}71$.

c) Pour une maladie rare, un test positif isolé est peu concluant (moins de 5 %) : les faux positifs, issus d'une population immense, dominent. Le second test change radicalement la conclusion.

Réponse. $\mathbb{P}(M \mid +) \approx 4{,}7$ % ; après deux tests positifs ≈ 71 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 4 – Une chaîne à deux états

a) Probabilités totales selon le temps du jour n : $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}4(1 - p_n)$.

b) Le point fixe est $\ell = \frac{2}{3}$, et $p_{n+1} - \ell = 0{,}4(p_n - \ell)$:

$$p_n = \frac{2}{3} + \left(p_0 - \frac{2}{3}\right)0{,}4^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

c) Quelle que soit la situation initiale, la probabilité de beau temps oublie exponentiellement vite l’état de départ ; $\frac{2}{3}$ est la loi stationnaire ($\ell = 0{,}8\ell + 0{,}4(1 - \ell)$).

Réponse. $p_n = \frac{2}{3} + (p_0 - \frac{2}{3})0{,}4^n \to \frac{2}{3}$.

Correction de l’exercice 5 – Indépendance et complémentaires

a) $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))$. On applique ensuite ce résultat au couple $(\overline{B}, A)$.

b) Pour $I \subset \{2, \dots, n\}$ et $C = \bigcap_{i \in I} A_i$: $\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap C) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A_1 \cap C) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_1))$.

c) En itérant b), les $\overline{A_i}$ sont mutuellement indépendants, d’où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap \overline{A_i}\right) = 1 - \prod (1 - \mathbb{P}(A_i))$$

Réponse. L’indépendance passe aux complémentaires ; $\mathbb{P}(\bigcup A_i) = 1 - \prod (1 - \mathbb{P}(A_i))$.

Correction de l’exercice 6 – Événement indépendant de lui-même

a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$ équivaut à $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

b) Si $\mathbb{P}(A) = 0$: $0 \le \mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(A) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, $\overline{A}$ est négligeable, indépendant de B, et l’on conclut par l’exercice précédent.

c) Non :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Incompatibles signifie au contraire qu’ils s’excluent : savoir que A est réalisé dit que B ne l’est pas.

Réponse. A indépendant de lui-même ssi $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$; incompatibles de probabilités non nulles : jamais indépendants.

Correction de l’exercice 7 – Le problème de Monty Hall

a) $\mathbb{P}(O_3 \mid V_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(O_3 \mid V_2) = 1$, $\mathbb{P}(O_3 \mid V_3) = 0$.

b) $\mathbb{P}(O_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) = \frac{1}{2}$, et

$$\mathbb{P}(V_2 \mid O_3) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{1/2} = \frac{2}{3}$$

c) Oui : en changeant, il gagne avec probabilité $\frac{2}{3}$, contre $\frac{1}{3}$ en gardant la porte 1. L’ouverture apporte une information sur les portes non choisies, pas sur la porte 1.

Réponse. $\mathbb{P}(V_2 \mid O_3) = \frac{2}{3}$: il faut changer.

Correction de l’exercice 8 – Le paradoxe des deux enfants

a) $\mathbb{P}(GG \mid \text{aîné } G) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\mathbb{P}(\text{au moins un } G) = \frac{3}{4}$, d'où

$$\mathbb{P}(GG \mid \text{au moins un } G) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

c) Les conditions ne retiennent pas les mêmes familles : $\{GG, GF\}$ dans le premier cas, $\{GG, GF, FG\}$ dans le second. L'information « au moins un » est plus faible et laisse deux cas mixtes.

Réponse. $\frac{1}{2}$ sachant l'aîné, $\frac{1}{3}$ sachant « au moins un ».

Correction de l'exercice 9 – Règle de succession de Laplace

a) Probabilités totales selon l'urne : $\pi_n = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.

b) $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} = \frac{\sum_k (k/N)^{n+1}}{\sum_k (k/N)^n}$.

c) $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^m \to \int_0^1 t^m\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m+1}$, donc

$$\frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{n+1}{n+2}$$

Laplace l'appliquait (avec ironie) au lever du soleil.

Réponse. $\mathbb{P}(\text{blanche} \mid n \text{ blanches}) = \frac{\sum (k/N)^{n+1}}{\sum (k/N)^n} \to \frac{n+1}{n+2}$.

Correction de l'exercice 10 – Divisibilité et indicatrice d'Euler

a) $n = 12$: $\mathbb{P}(D_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(D_6) = \frac{1}{6}$ ✓. $n = 10$:
$\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{20} \neq \frac{1}{10} = \mathbb{P}(D_6)$.

b) $\mathbb{P}(D_d) = \frac{n/d}{n} = \frac{1}{d}$. Pour des premiers distincts $p_1, \ldots, p_r$ divisant n,
$D_{p_1} \cap \cdots \cap D_{p_r} = D_{p_1 \cdots p_r}$ et $p_1 \cdots p_r \mid n$: probabilité $\prod \frac{1}{p_i}$.

c) X est premier avec n si et seulement si aucun premier $p \mid n$ ne divise X ; par indépendance des complémentaires :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \mid n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Réponse. Indépendance si $6 \mid n$ (ici 12), pas pour 10 ; d'où $\varphi(n) = n\prod_{p\mid n}(1-\frac{1}{p})$.

Correction de l'exercice 11 – Nombre de lancers décidé par un dé

a) $\mathbb{P}(\text{aucun pile}) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{21}{128}$.

b) $\mathbb{P}(K = 1 \mid \text{aucun}) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{21/128} = \frac{1/12}{21/128} = \frac{32}{63}$.

c) $\mathbb{P}(\text{un pile} \mid K = k) = \frac{k}{2^k}$, et $\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \frac{3}{32} = \frac{15}{8}$:

$$\mathbb{P}(K = k \mid \text{un pile}) = \frac{k/2^k}{15/8} = \frac{8k}{15\cdot 2^k}$$

soit $\frac{4}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$.

Réponse. $\frac{21}{128}$; $\mathbb{P}(K = 1 \mid \text{aucun}) = \frac{32}{63}$; $\mathbb{P}(K = k \mid \text{un}) = \frac{8k}{15\cdot 2^k}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Transfert entre deux urnes

a) Selon la boule transférée : $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

b) $\mathbb{P}(T_B \mid B) = \frac{2/3\cdot 2/4}{5/12} = \frac{1/3}{5/12} = \frac{4}{5}$.

c) On transfère 2 blanches (probabilité $\frac{1}{3}$) ou une blanche et une noire ($\frac{2}{3}$). U_2 contient alors 5 boules, dont 3 ou 2 blanches :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

et $\mathbb{P}(\text{deux blanches transférées} \mid B) = \frac{1/5}{7/15} = \frac{3}{7}$.

Réponse. $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{12}$, $\mathbb{P}(T_B \mid B) = \frac{4}{5}$; avec deux boules : $\frac{7}{15}$ et $\frac{3}{7}$.

Correction de l'exercice 13 – Combien de conditions pour l'indépendance mutuelle ?

a) Une égalité pour chaque partie de cardinal au moins 2 : $2^n - n - 1$ (soit 4 pour $n = 3$).

b) Chaque événement a probabilité $\frac{1}{2}$; $A \cap B = \{1,2\}$, $A \cap C = \{1,3\}$, $B \cap C = \{1,5\}$ ont probabilité $\frac{1}{4}$, et $A \cap B \cap C = \{1\}$ a probabilité $\frac{1}{8}$: indépendance mutuelle.

c) $A \cap B \cap C' = \{1\}$ de probabilité $\frac{1}{8}$, mais

$$\mathbb{P}(A \cap C') = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$$

L'égalité pour le triplet ne remplace pas les égalités pour les paires.

Réponse. $2^n - n - 1$ égalités ; A, B, C mutuellement indépendants ; avec C', l'égalité triple seule ne suffit pas.

Correction de l'exercice 14 – Probabilité conditionnelle et formule de chaîne

a) $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1$, et pour des A_n disjoints, les $A_n \cap B$ sont disjoints : σ-additivité de $\mathbb{P}$ divisée par $\mathbb{P}(B)$.

b) $\frac{\mathbb{P}(A \cap C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \frac{\mathbb{P}(C \cap A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cap B)}$.

c) Le jeu contient 16 rouges dont 8 cœurs. Sachant la première rouge, c'est un cœur avec probabilité $\frac{1}{2}$, puis les deux suivantes sont des cœurs avec probabilité $\frac{7}{31}\cdot\frac{6}{30}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{31}\cdot\frac{6}{30} = \frac{7}{310} \approx 0{,}023$$

Réponse. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité ; probabilité cherchée $\frac{7}{310}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : ruine face à un adversaire infiniment riche

a) Conditionnement par la première partie. L'équation caractéristique $pX^2 - X + q = 0$ a pour racines 1 et $r \neq 1$, donc $u_k = \alpha + \beta r^k$; $u_0 = 1$ et $u_N = 0$ donnent la formule.

b) Être ruiné avant d'atteindre N implique d'être ruiné avant d'atteindre $N+1$ (on atteint N avant $N+1$). Une ruine en temps fini se produit avant que la fortune n'ait dépassé un certain N.

c) Par continuité croissante, $\mathbb{P}(R) = \lim_N u_k$. Si $p < \frac{1}{2}$, $r > 1$: $u_k = \frac{r^{k-N} - 1}{r^{-N} - 1} \to 1$. Si $p > \frac{1}{2}$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$r < 1$ et

$$\mathbb{P}(R) = r^k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

Si $p = \frac{1}{2}$: $1 - \frac{k}{N} \to 1$. Le joueur n'a une chance de survivre que si le jeu lui est favorable.

Réponse. $u_k = \frac{r^k - r^N}{1 - r^N}$; $\mathbb{P}(R) = 1$ si $p \le \frac{1}{2}$, $(q/p)^k$ si $p > \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).