Plaquette 4 – Couples de variables aléatoires : lois conjointes, marginales et indépendance

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Marginales et conditionnelles. $\mathbb{P}(X=x)=\sum_y \mathbb{P}(X=x,Y=y)$ et $\mathbb{P}(X=x\mid Y=y)=\dfrac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$.

Indépendance. X et Y sont indépendantes si $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$ pour tous x,y ; alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi (et, plus généralement, **lemme des coalitions**).

Somme de variables indépendantes à valeurs entières :

$$\mathbb{P}(X+Y=n)=\sum_{k}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

Maximum et minimum. Si X, Y sont indépendantes : $\mathbb{P}(\max(X,Y)\le n)=\mathbb{P}(X\le n)\mathbb{P}(Y\le n)$ et $\mathbb{P}(\min(X,Y)>n)=\mathbb{P}(X>n)\mathbb{P}(Y>n)$.

Correction de l’exercice 1 – Maximum de deux variables géométriques

a) $\mathbb{P}(X\le n)=1-q^n$, donc $\mathbb{P}(M\le n)=(1-q^n)^2$ et

$$\mathbb{P}(M=n)=(1-q^n)^2-(1-q^{n-1})^2$$

b) $\mathbb{P}(M=1)=\frac14$ et $\mathbb{P}(M=2)=\frac{9}{16}-\frac14=\frac{5}{16}$.

c) $\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k\ge1}p^2q^{2(k-1)}=\dfrac{p^2}{1-q^2}=\dfrac{p}{2-p}$.

Réponse. $\mathbb{P}(M\le n)=(1-q^n)^2$; pour $p=\frac12$: $\frac14$, $\frac{5}{16}$; $\mathbb{P}(X=Y)=\dfrac{p}{2-p}$.

Correction de l’exercice 2 – Somme de deux variables géométriques

a) Convolution : $\mathbb{P}(S=n)=\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}\cdot pq^{n-k-1}=(n-1)p^2q^{n-2}$.

b) S est le rang du second succès dans une suite d’épreuves de Bernoulli de paramètre p ; on retrouve le choix de la position du premier succès parmi $n-1$.

c) Pour $1\le k\le n-1$:

$$\mathbb{P}(X=k\mid S=n)=\frac{pq^{k-1}pq^{n-k-1}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

loi uniforme sur $\{1,\dots,n-1\}$.

Réponse. $\mathbb{P}(S=n)=(n-1)p^2q^{n-2}$; sachant $S=n$, X est uniforme sur $\{1,\dots,n-1\}$.

Correction de l’exercice 3 – Stabilité de la loi binomiale

a) $\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_j\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}p^k(1-p)^{n+m-k}$, et $\sum_j\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}$.

b) $X=\sum_{i\le n}B_i$, $Y=\sum_{n<i\le n+m}B_i$ avec des B_i indépendantes de loi $B(p)$: $X+Y$ compte les succès en $n+m$ épreuves.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\mathbb{P}(X=j \mid X+Y=k)=\dfrac{\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n+m}{k}}$:

loi hypergéométrique, indépendante de p

Réponse. $X+Y\sim B(n+m,p)$; sachant $X+Y=k$, X suit une loi hypergéométrique.

Correction de l'exercice 4 – Deux filtres successifs

a) $N\sim B(n,p)$ et, sachant $N=m$, $X\sim B(m,r)$.

b) $\mathbb{P}(X=k)=\sum_m \binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}\binom{m}{k}r^k(1-r)^{m-k}$. Avec l'identité et $j=m-k$:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}(pr)^k\sum_j\binom{n-k}{j}(p(1-r))^j(1-p)^{n-k-j}=\binom{n}{k}(pr)^k(1-pr)^{n-k}$$

c) Chaque pièce franchit les deux contrôles avec probabilité pr, indépendamment des autres.

Réponse. $X\sim B(n,pr)$.

Correction de l'exercice 5 – Une loi conjointe non produit

a) $\sum_{j,k}\frac{j+k}{j!k!}=2\sum_j\frac{j}{j!}\sum_k\frac{1}{k!}=2\mathrm{e}^2$, donc $a=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$.

b) $\mathbb{P}(X=j)=\frac{1}{2\mathrm{e}^2 j!}\sum_k\frac{j+k}{k!}=\frac{j\mathrm{e}+\mathrm{e}}{2\mathrm{e}^2 j!}$, soit

$$\mathbb{P}(X=j)=\frac{j+1}{2\mathrm{e}\,j!}$$

c) $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0$ alors que $\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{4\mathrm{e}^2}\neq 0$: non indépendantes.

Réponse. $a=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$, $\mathbb{P}(X=j)=\frac{j+1}{2\mathrm{e}j!}$; non indépendantes.

Correction de l'exercice 6 – Couple uniforme sur un triangle

a) $\mathrm{card}\,T=\frac{n(n+1)}{2}$; $\mathbb{P}(Y=j)=\frac{2j}{n(n+1)}$ (j valeurs de i) et $\mathbb{P}(X=i)=\frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}$.

b) $\mathbb{P}(X=i\mid Y=j)=\frac{1}{j}$ pour $1\le i\le j$: loi uniforme sur $\{1,\dots,j\}$.

c) $\mathbb{P}(X=Y)=\frac{n}{n(n+1)/2}=\frac{2}{n+1}$. Pour $n\ge 2$, $\mathbb{P}(X=2,Y=1)=0$ alors que

$$\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1)>0$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Réponse. Marginales $\frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}$ et $\frac{2j}{n(n+1)}$; $X\mid Y=j$ uniforme ; $\mathbb{P}(X=Y)=\frac{2}{n+1}$.

Correction de l'exercice 7 – Lemme des coalitions

a) $\mathbb{P}(\min>n)=q^{2n}$: $\min(X,Y)\sim G(1-q^2)$.

b) Par indépendance de Z et du minimum :

$$\mathbb{P}(Z<\min(X,Y))=\sum_{k\ge 1}pq^{k-1}q^{2k}=\frac{pq^2}{1-q^3}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour $p = \frac{1}{2}$: $\frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$. Par symétrie, chacune des trois variables a la même probabilité d'être strictement la plus petite, mais les égalités ont une probabilité non nulle : $3 \cdot \frac{1}{7} < 1$.

Réponse. $\min(X, Y) \sim G(1-q^2)$; $\mathbb{P}(Z < \min) = \frac{pq^2}{1-q^3}$ ($\frac{1}{7}$ pour $p = \frac{1}{2}$).

Correction de l'exercice 8 – Fonctions de variables indépendantes

a) $\mathbb{P}(f(X) = a, g(Y) = b) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \sum_{y \in g^{-1}(b)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$, qui se factorise en $\mathbb{P}(f(X) = a)\mathbb{P}(g(Y) = b)$.

b) Prendre $f = g =$ (reste modulo 2).

c) X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$, $f(X) = 1_{X \leq 2}$ et $g(X) = 1_{X \text{ pair}}$:

$$\mathbb{P}(X \leq 2, X \text{ pair}) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

(les autres cas s'en déduisent par complémentaire).

Réponse. $f(X)$, $g(Y)$ indépendantes ; exemple : $1_{X \leq 2}$ et $1_{X \text{ pair}}$ pour X uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

Correction de l'exercice 9 – Loi de la différence de deux géométriques

a) $\mathbb{P}(D = k) = \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(Y = j)\mathbb{P}(X = j + k) = p^2 q^k \sum_{j \geq 1} q^{2j-2} = \frac{pq^k}{2-p}$.

b) Par symétrie (X et Y jouent le même rôle), $\mathbb{P}(D = k) = \frac{pq^{|k|}}{2-p}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Somme : $\frac{p}{2-p}\left(1 + \frac{2q}{1-q}\right) = \frac{p}{2-p} \cdot \frac{2-p}{p} = 1$.

c) $\mathbb{P}(D > 0) = \frac{p}{2-p} \cdot \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{2-p}$, cohérent avec

$$2\,\mathbb{P}(D > 0) + \mathbb{P}(D = 0) = \frac{2 - 2p + p}{2-p} = 1$$

Réponse. $\mathbb{P}(X - Y = k) = \frac{pq^{|k|}}{2-p}$; $\mathbb{P}(X > Y) = \frac{1-p}{2-p}$.

Correction de l'exercice 10 – Minimum et écart sont indépendants

a) Pour $k \geq 0$: $(U = u, V = k) = (Y = u, X = u + k)$, de probabilité $p^2 q^{2u+k-2}$. Pour $k < 0$: $(X = u, Y = u - k)$, de probabilité $p^2 q^{2u+|k|-2}$. Dans tous les cas :

$$\mathbb{P}(U = u, V = k) = \left(q^{2u-2}(1-q^2)\right) \cdot \frac{p^2 q^{|k|}}{1-q^2}$$

b) C'est un produit d'une fonction de u et d'une fonction de k ; les facteurs sont les lois de $U \sim G(1-q^2)$ et de V (exercice précédent, car $\frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{2-p}$).

c) Sachant que les deux variables dépassent $u - 1$, tout « recommence » : l'écart restant ne garde aucune trace de la valeur du minimum.

Réponse. La loi conjointe se factorise : $U \sim G(1-q^2)$ et $V = X - Y$ sont indépendantes.

Correction de l'exercice 11 – Indépendance d'indicatrices

a) L'indépendance des variables impose $\mathbb{P}(1_A = 1, 1_B = 1) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$; réciproquement, les trois autres égalités découlent du passage aux complémentaires.

b) Pour une configuration $\varepsilon \in \{0, 1\}^n$ comportant k uns :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}((B_i) = \varepsilon \mid S = k) = \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

c) Parmi les configurations à k uns, une proportion $\dfrac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{k}{n}$ a $\varepsilon_1 = 1$.

Réponse. Sachant $S = k$, configurations équiprobables ; $\mathbb{P}(B_1 = 1 \mid S = k) = \frac{k}{n}$, indépendant de p.

Correction de l'exercice 12 – Le problème du chevalier de Méré

a) $\mathbb{P}(M \le k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n$ et $\mathbb{P}(M = 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b) $1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518 > \frac{1}{2}$: favorable.

c) Chaque lancer double donne un double six avec probabilité $\frac{1}{36}$:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491 < \frac{1}{2}$$

défavorable, contrairement à l'intuition « $4/6 = 24/36$ » (il aurait fallu 25 lancers).

Réponse. $\mathbb{P}(M = 6) = 1 - (\frac{5}{6})^n$; 0,518 (favorable) contre 0,491 (défavorable).

Correction de l'exercice 13 – Indépendance deux à deux de variables

a) $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2}$: Z est uniforme sur $\{-1, 1\}$.

b) $\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \mathbb{P}(X = x, Y = xz) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Z = z)$; de même pour (Y, Z), et (X, Y) par hypothèse.

c) Non :

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = -1) = 0 \neq \frac{1}{8}$$

Z est une fonction de (X, Y).

Réponse. Z uniforme sur $\{-1, 1\}$; indépendance deux à deux mais pas mutuelle.

Correction de l'exercice 14 – Loi de la somme d'un dé et d'une pièce

a) $(D, P) \mapsto D + 6P$ est une bijection de $\{1, \dots, 6\} \times \{0, 1\}$ sur $\{1, \dots, 12\}$, et le couple est uniforme : $\mathbb{P}(S = s) = \frac{1}{12}$.

b) $\mathbb{P}(S = 1, D = 2) = 0 \neq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6}$, et $\mathbb{P}(S = 1, P = 1) = 0 \neq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}$: ni l'une ni l'autre.

c) $P = 1_{S \ge 7}$ et

$$D = S - 6P$$

S contient toute l'information du couple : une variable n'est indépendante d'une de ses fonctions que si celle-ci est presque sûrement constante.

Réponse. S uniforme sur $\{1, \dots, 12\}$, ni indépendante de D ni de P, qui en sont des fonctions.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le partage d'une loi de Poisson

a) $(X = k, Y = \ell) = (N = k + \ell, X = k)$, d'où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(X=k,Y=\ell)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^\ell=\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!}$$

b) La loi conjointe se factorise en produit de deux lois de Poisson : $X\sim P(\lambda p)$, $Y\sim P(\lambda(1-p))$, indépendantes. Ce phénomène est propre à la loi de Poisson : avec N fixé, X et $N-X$ seraient au contraire liées.

c) $\mathbb{P}(N=n\mid X=k)=\mathbb{P}(Y=n-k\mid X=k)=\mathbb{P}(Y=n-k)$: sachant $X=k$, $N-k\sim P(\lambda(1-p))$.

Réponse. $X\sim P(\lambda p)$ et $N-X\sim P(\lambda(1-p))$ indépendantes ; sachant $X=k$, $N-k\sim P(\lambda(1-p))$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).