Plaquette 2 – Espaces probabilisés : tribus, continuité monotone et Borel-Cantelli

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Tribu. $A \subset P(\Omega)$ contient Ω, est stable par complémentaire et par réunion dénombrable (donc par intersection dénombrable).

Continuité monotone. $A_n \uparrow A \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$; $A_n \downarrow A \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$.

Borel-Cantelli. Avec $\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$ (« une infinité de A_k se réalisent ») :

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

et si les A_n sont **mutuellement indépendants** avec $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Utile. $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x.

Correction de l'exercice 1 – Parties finies ou cofinies

a) Ω est de complémentaire vide. La stabilité par complémentaire est évidente. Pour $A \cup B$: si A et B sont finis, $A \cup B$ l'est ; si l'un est cofini, $A \cup B$ le contient, donc est cofini.

b) Les $\{2n\}$ sont dans F, mais leur réunion dénombrable

$$2\mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 0} \{2n\}$$

est infinie, de complémentaire infini.

c) Toute partie de $\mathbb{N}$ est une réunion dénombrable de singletons : la tribu engendrée est $P(\mathbb{N})$.

Réponse. F est stable par réunion finie mais pas dénombrable ($2\mathbb{N} \notin F$) ; tribu engendrée par les singletons : $P(\mathbb{N})$.

Correction de l'exercice 2 – Ne jamais obtenir pile

a) Par indépendance, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$.

b) La suite (A_n) est décroissante, d'intersection « ne jamais obtenir pile » :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \frac{1}{2^n} = 0$$

c) « Un nombre fini de piles » $= \bigcup_m F_m$ avec F_m : « que des faces à partir du rang m ». Le même raisonnement donne $\mathbb{P}(F_m) = 0$, et une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Réponse. $\mathbb{P}(\text{jamais pile}) = 0$; presque sûrement une infinité de piles.

Correction de l'exercice 3 – Un double six finit par arriver

a) Les B_k portent sur des lancers disjoints : ils sont mutuellement indépendants, avec $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{36}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\le n}\overline{B_k}\right)=\left(\frac{35}{36}\right)^n$, et par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\ge 1}\overline{B_k}\right)=\lim_n\left(\frac{35}{36}\right)^n=0$$

c) L'événement « obtenir deux 6 consécutifs » contient $\bigcup_k B_k$, de probabilité 1.

Réponse. $\mathbb{P}(\text{aucun } B_k)=0$: deux 6 consécutifs arrivent presque sûrement.

Correction de l'exercice 4 – Premier lemme de Borel-Cantelli

a) Sous-additivité, puis $\operatorname{limsup}A_n\subset\bigcup_{k\ge n}A_k$ pour tout n : $\mathbb{P}(\operatorname{limsup}A_n)\le\sum_{k\ge n}\mathbb{P}(A_k)$, reste d'une série convergente, qui tend vers 0.

b) $\mathbb{P}(X>m)=\frac{1}{2^m}$ pour $m\in\mathbb{N}$. X_n étant entière, avec $m=\lfloor 2\log_2 n\rfloor\ge 2\log_2 n-1$:

$$\mathbb{P}(X_n>2\log_2 n)=\frac{1}{2^m}\le 2^{1-2\log_2 n}=\frac{2}{n^2}$$

c) $\sum\frac{2}{n^2}<+\infty$: presque sûrement, seul un nombre fini d'événements $(X_n>2\log_2 n)$ se réalisent.

Réponse. $\mathbb{P}(\operatorname{limsup}A_n)=0$; p.s. $X_n\le 2\log_2 n$ à partir d'un certain rang.

Correction de l'exercice 5 – Second lemme de Borel-Cantelli et singe dactylographe

a) Par indépendance et $1-x\le \mathrm{e}^{-x}$: $\prod_{k=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_k))\le \mathrm{e}^{-\sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k)}$.

b) En faisant $N\to+\infty$ (continuité décroissante), $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\ge n}\overline{A_k}\right)=0$ pour tout n. Le complémentaire de $\operatorname{limsup}A_n$ est $\bigcup_n\bigcap_{k\ge n}\overline{A_k}$, réunion dénombrable d'événements négligeables.

c) Soit A_k : « les frappes $5k-4$ à $5k$ forment MATHS ». Les A_k sont indépendants et

$$\sum_k\mathbb{P}(A_k)=\sum_k\frac{1}{26^5}=+\infty$$

donc presque sûrement une infinité d'entre eux se réalisent.

Réponse. $\mathbb{P}(\operatorname{limsup}A_n)=1$; MATHS apparaît p.s. une infinité de fois.

Correction de l'exercice 6 – Pas de probabilité uniforme sur les entiers

a) Si $\mathbb{P}(\{n\})=c$ pour tout n, la σ-additivité donne $1=\mathbb{P}(\mathbb{N})=\sum_n c$, qui vaut 0 ou $+\infty$.

b) $d(2\mathbb{N})=\frac{1}{2}$ et $d(\{n\})=0$.

c) $\mathbb{N}^*=\bigcup_n\{n\}$ (réunion disjointe), mais

$$d(\mathbb{N}^*)=1\neq 0=\sum_n d(\{n\})$$

La densité n'est qu'additive : « choisir un entier au hasard uniformément » n'a pas de sens probabiliste.

Réponse. Aucune probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$; la densité est additive mais pas σ-additive.

Correction de l'exercice 7 – Loi zêta et produit eulérien

a) $\mathbb{P}(d\mid X)=\sum_{k\ge 1}\mathbb{P}(X=dk)=\frac{1}{\zeta(s)d^s}\sum_k\frac{1}{k^s}=\frac{1}{d^s}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour des premiers distincts $p_1, \dots, p_r$, « tous divisent X » équivaut à $p_1 \cdots p_r \mid X$: probabilité $\prod \frac{1}{p_i^s}$.

c) Les complémentaires sont aussi indépendants. Si $p_1 < p_2 < \cdots$ sont les nombres premiers, $C_N = \bigcap_{i \le N} (p_i \nmid X)$ décroît vers $(X = 1)$, d'où

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mathbb{P}(X = 1) = \lim_N \prod_{i \le N} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

Réponse. $\mathbb{P}(d \mid X) = d^{-s}$, indépendance sur les premiers, d'où $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s})$.

Correction de l'exercice 8 – Dérangements et formule du crible

a) Il reste $(n-k)!$ permutations fixant ces k points : $\frac{(n-k)!}{n!}$.

b) $\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$, donc

$$p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

c) $p_n \to \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$, et par le critère des séries alternées, $|p_n - \mathrm{e}^{-1}| \le \frac{1}{(n+1)!}$.

Réponse. $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \mathrm{e}^{-1}$, à $\frac{1}{(n+1)!}$ près.

Correction de l'exercice 9 – Écrire un événement asymptotique

a) Bornée : il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n, $|X_n| \le M$, soit $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcap_n (|X_n| \le M)$.

b) Pour tout $p \ge 1$, il existe un rang à partir duquel $|X_k| \le \frac{1}{p}$:

$$(X_n \to 0) = \bigcap_{p \ge 1} \bigcup_{n \ge 0} \bigcap_{k \ge n} \left(|X_k| \le \frac{1}{p}\right)$$

c) Chaque $(|X_k| \le c)$ est un événement (X_k variable aléatoire), et une tribu est stable par réunions et intersections dénombrables. (Les quantificateurs « pour tout $\varepsilon > 0$ » ont été remplacés par « pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ » pour rester dénombrable.)

Réponse. $(X_n \to 0) = \bigcap_p \bigcup_n \bigcap_{k \ge n} (|X_k| \le \frac{1}{p})$: un événement.

Correction de l'exercice 10 – Événements négligeables et presque sûrs

a) Sous-additivité : $\mathbb{P}\left(\bigcup N_k\right) \le \sum \mathbb{P}(N_k) = 0$. Par passage au complémentaire, $\overline{\bigcap S_k} = \bigcup \overline{S_k}$ est négligeable.

b) La suite fixée est contenue, pour tout n, dans l'événement « les n premiers lancers coïncident avec elle », de probabilité $\frac{1}{2^n}$.

c) Une suite stationnaire est déterminée par un rang n et un mot fini : l'ensemble est une réunion dénombrable

$$\bigcup_{n \ge 0} \{\text{suites constantes à partir du rang } n\}$$

chacun de ces ensembles étant fini (mot de longueur n et valeur constante), donc négligeable par b).

Réponse. Union dénombrable de négligeables : négligeable ; chaque suite et l'ensemble des suites stationnaires sont négligeables.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Premier pile à un rang pair

a) $\mathbb{P}(T=k)=(1-p)^{k-1}p$ et $\sum_{k\geq 1}(1-p)^{k-1}p=1$.

b) σ-additivité :

$$\mathbb{P}(T \text{ pair})=\sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k-1}p=\frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}=\frac{1-p}{2-p}$$

c) $\frac{1-p}{2-p}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4-4p=2-p\Leftrightarrow p=\frac{2}{3}$. Et $\frac{1-p}{2-p}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2-2p<2-p$, vrai pour $p>0$.

Réponse. $\mathbb{P}(T \text{ pair})=\frac{1-p}{2-p}<\frac{1}{2}$; vaut $\frac{1}{4}$ pour $p=\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 12 – Premier à faire six

a) Il faut $2(k-1)$ échecs, puis un 6 : $\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}\frac{1}{6}$.

b) Par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(\text{Anna gagne})=\frac{1}{6}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{11}=\frac{6}{11}$$

De même $\mathbb{P}(\text{Bruno gagne})=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$.

c) $\frac{6}{11}+\frac{5}{11}=1$: la partie infinie est négligeable.

Réponse. Anna gagne avec probabilité $\frac{6}{11}$, Bruno $\frac{5}{11}$; la partie finit p.s.

Correction de l'exercice 13 – Probabilité sur les entiers et parité d'une loi de Poisson

a) Unicité : par σ-additivité, $\mathbb{P}(A)=\sum_{n\in A}p_n$. Existence : cette formule définit une probabilité (sommation par paquets pour une famille positive).

b) $\mathbb{P}(X \text{ pair})=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_k\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{ch}\lambda$, soit

$$\mathbb{P}(X \text{ pair})=\frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}$$

c) $\mathrm{e}^{-2\lambda}>0$: la valeur 0, paire, avantage les pairs.

Réponse. $\mathbb{P}(X \text{ pair})=\frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}>\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Sauts de la fonction de répartition

a) $(X\leq x+\frac{1}{n})$ décroît vers $(X\leq x)$, donc $F\left(x+\frac{1}{n}\right)\to F(x)$; F étant croissante, cela suffit.

b) $(X\leq x-\frac{1}{n})$ croît vers $(X<x)$; avec la monotonie de F, $F(x^-)=\mathbb{P}(X<x)$ et

$$F(x)-F(x^-)=\mathbb{P}(X\leq x)-\mathbb{P}(X<x)=\mathbb{P}(X=x)$$

c) F est discontinue en x si et seulement si $\mathbb{P}(X=x)>0$, donc seulement aux points de $X(\Omega)$, au plus dénombrable.

Réponse. F continue à droite, saut $\mathbb{P}(X=x)$ en x, discontinuités dans $X(\Omega)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : attendre deux piles consécutifs

a) Si un F apparaît avant le premier motif PP, le premier PP suivant est précédé d'un F suivi de P : le motif FP apparaît avant (au premier P suivant ce F). Donc PP gagne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

seulement si les deux premiers lancers sont PP : probabilité $\frac{1}{4}$, et FP gagne avec probabilité $\frac{3}{4}$.

b) Pour $n=2$: $\mathbb{P}(PP)=\frac{1}{4}=\frac{F_1}{2^2}$. Pour $n\geq 3$, les mots de longueur n réalisant $(T=n)$ s'écrivent $uFPP$ avec u de longueur $n-3$ sans PP : F_{n-1} mots équiprobables, chacun de probabilité $\frac{1}{2^n}$.

c) $\sum_{n\geq 2}\frac{F_{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}\frac{F_m}{2^m}$, avec $x=\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1/2}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Réponse. PP bat FP avec probabilité $\frac{1}{4}$; $\mathbb{P}(T=n)=\frac{F_{n-1}}{2^n}$, de somme 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).