Plaquette 5 – Synthèse : problèmes classiques de probabilités discrètes

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Stirling. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$, d'où $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Approximation de Poisson. Si $np_n \to \lambda$:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Inégalité utile. $1 - x \le \mathrm{e}^{-x}$, donc $\prod (1-x_k) \le \exp\left(-\sum x_k\right)$ pour des $x_k \in [0,1]$.

Récurrence par premier pas. Une probabilité u définie par une expérience qui « recommence » vérifie souvent $u = \varphi(u)$; on identifie la bonne solution par un argument de limite.

Correction de l'exercice 1 – Le message déformé

a) Probabilités totales selon l'état après n transmissions : $p_{n+1} = (1-p)p_n + p(1-p_n)$.

b) Point fixe $\frac{1}{2}$, et $p_{n+1} - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ avec $p_0 = 1$.

c) $p_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}8^{10} \approx 0{,}554$.

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Après une longue chaîne, le message n'apporte presque plus d'information (le « téléphone arabe »).

Réponse. $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n \to \frac{1}{2}$; $p_{10} \approx 0{,}554$.

Correction de l'exercice 2 – Records d'une permutation aléatoire

a) Par symétrie, le maximum de $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$ est en chacune des k positions avec la même probabilité.

b) Sachant R_k, l'ordre relatif de $\sigma(1), \dots, \sigma(k-1)$ est encore uniforme, donc $\mathbb{P}(R_j \mid R_k) = \frac{1}{j}$: les deux événements sont indépendants.

c) Un seul record (le rang 1) signifie $\sigma(1) = n$: probabilité $\frac{1}{n}$. n records signifie σ croissante :

$$\mathbb{P}(n \text{ records}) = \frac{1}{n!}$$

Réponse. $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{k}$, R_j et R_k indépendants ; un record : $\frac{1}{n}$; n records : $\frac{1}{n!}$.

Correction de l'exercice 3 – Retour à l'origine d'une marche aléatoire

a) Il faut n pas $+1$ parmi $2n$: $\binom{2n}{n}$ chemins équiprobables sur 4^n. Après un nombre impair de pas, S est impaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Stirling : $\mathbb{P}(S_{2n}=0)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

c) Chaque pas change U de ±1 et V de ±1, les quatre combinaisons correspondant aux quatre pas : U et V sont deux marches indépendantes sur $\mathbb{Z}$. Le retour en 0 équivaut à $U=V=0$:

$$\left(\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\right)^2\sim\frac{1}{\pi n}$$

Réponse. $\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$; dans le plan $\sim\frac{1}{\pi n}$.

Correction de l’exercice 4 – Attendre de voir les deux faces

a) $(T=n)$: les $n-1$ premiers lancers identiques, le n-ième différent. Pour $n\geq 2$: $\mathbb{P}(T=n)=2\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

b) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^{n-1}}=1$ et

$$\mathbb{P}(T>5)=\mathbb{P}(\text{les 5 premiers identiques})=\frac{2}{2^5}=\frac{1}{16}$$

c) $\mathbb{P}(T-1=k)=\frac{1}{2^k}$: $T-1\sim G\left(\frac{1}{2}\right)$. Après le premier lancer, on attend le premier résultat différent de celui-ci, ce qui a probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque lancer.

Réponse. $\mathbb{P}(T=n)=\frac{1}{2^{n-1}}$ $(n\geq 2)$, $T-1\sim G(\frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(T>5)=\frac{1}{16}$.

Correction de l’exercice 5 – Le paradoxe des anniversaires

a) La $(k+1)$-ième personne doit éviter les k dates déjà prises (probabilités composées).

b) $1-x\leq \mathrm{e}^{-x}$ et $\sum_{k<n}k=\frac{n(n-1)}{2}$.

c) Pour $n=23$: $\frac{23\times 22}{730}=\frac{506}{730}\approx 0{,}693151$, de justesse supérieur à $\ln 2\approx 0{,}693147$, donc

$$q_{23}<\mathrm{e}^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$$

et q_n décroît avec n. (La valeur exacte est $q_{23}\approx 0{,}493$.)

Réponse. $q_n\leq \mathrm{e}^{-n(n-1)/730}$; pour $n\geq 23$, coïncidence avec probabilité $>\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 6 – Approximation de Poisson

a) $\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}=\frac{\lambda^k}{k!}\prod_{i<k}\left(1-\frac{i}{n}\right)\to\frac{\lambda^k}{k!}$ et $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)\to\mathrm{e}^{-\lambda}$.

b) $\mathbb{P}(X=0)=0{,}98^{100}\approx 0{,}1326$ contre $\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}1353$; $\mathbb{P}(X=1)=2\times 0{,}98^{99}\approx 0{,}2707$ contre

$$2\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}2707$$

c) Un grand nombre d’épreuves indépendantes, chacune de faible probabilité, produit un nombre de succès approximativement poissonien, ne dépendant que de $\lambda=np$.

Réponse. $B(n,\lambda/n)\to P(\lambda)$; ici 0,1326 contre 0,1353, et 0,2707 dans les deux cas.

Correction de l’exercice 7 – Les boîtes d’allumettes de Banach

a) Il faut que le $(2N-k+1)$-ième choix soit la poche gauche, et que parmi les $2N-k$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

choix précédents exactement N aient été la gauche (vidant la boîte) et $N-k$ la droite :

$$\binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}\cdot\frac{1}{2}$$

b) Par symétrie gauche/droite, pour $0 \le k \le N$:

$$\mathbb{P}(K=k)=\binom{2N-k}{N}\frac{1}{2^{2N-k}}$$

c) $N=1$: $\mathbb{P}(K=0)=\binom{2}{1}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(K=1)=\binom{1}{1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, de somme 1. (Directement : après avoir utilisé une allumette, il retombe sur la boîte vide ou non avec probabilité $\frac{1}{2}$.)

Réponse. $\mathbb{P}(K=k)=\binom{2N-k}{N}2^{-(2N-k)}$ pour $0 \le k \le N$.

Correction de l’exercice 8 – Nombre de points fixes d’une permutation

a) On choisit les k points fixes ($\binom{n}{k}$ façons), puis une permutation sans point fixe des $n-k$ autres ($(n-k)!\,d_{n-k}$ façons) :

$$\mathbb{P}(F_n=k)=\frac{\binom{n}{k}(n-k)!\,d_{n-k}}{n!}=\frac{d_{n-k}}{k!}$$

b) $d_{n-k}\to \mathrm{e}^{-1}$, donc $\mathbb{P}(F_n=k)\to\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$: loi de Poisson $P(1)$.

c) $d_0=1$, $d_1=0$, $d_2=\frac{1}{2}$, $d_3=\frac{1}{3}$, $d_4=\frac{3}{8}$: $\mathbb{P}(F_4=k)=\frac{3}{8},\frac{1}{3},\frac{1}{4},0,\frac{1}{24}$, de somme $\frac{9+8+6+0+1}{24}=1$.

Réponse. $\mathbb{P}(F_n=k)=\frac{d_{n-k}}{k!}\to\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$; pour $n=4$: $\frac{3}{8},\frac{1}{3},\frac{1}{4},0,\frac{1}{24}$.

Correction de l’exercice 9 – Deux entiers aléatoires premiers entre eux

a) Par indépendance et $\mathbb{P}(d\mid X)=\frac{1}{d^s}$: $\frac{1}{d^{2s}}$.

b) Pour des premiers distincts, $E_{p_1}\cap\cdots\cap E_{p_r}=(p_1\cdots p_r\mid X \text{ et } p_1\cdots p_r\mid Y)$, de probabilité $\prod p_i^{-2s}$.

c) $X\wedge Y=1$ si et seulement si aucun E_p n’est réalisé ; par continuité décroissante et indépendance des complémentaires :

$$\mathbb{P}(X\wedge Y=1)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)=\frac{1}{\zeta(2s)}$$

Réponse. $\mathbb{P}(X\wedge Y=1)=\frac{1}{\zeta(2s)}$ (qui tend vers $\frac{6}{\pi^2}$ quand $s\to 1^+$).

Correction de l’exercice 10 – Rencontre dans un tournoi à élimination

a) Chaque match élimine un joueur et il y a un vainqueur : 2^n-1 matchs.

b) Le tirage du tableau est uniforme et les matchs sont équitables : la situation est invariante par permutation des joueurs, donc chaque paire a la même probabilité d’être celle d’un match donné.

c) Deux joueurs se rencontrent au plus une fois : les événements « A et B s’affrontent au match m » sont incompatibles, d’où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(A \text{ rencontre } B) = \frac{2^n - 1}{\binom{2^n}{2}} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pour 8 joueurs : $\frac{1}{4}$.

Réponse. $2^n - 1$ matchs ; $\mathbb{P}(A \text{ rencontre } B) = \frac{1}{2^{n-1}}$ ($\frac{1}{4}$ pour 8 joueurs).

Correction de l’exercice 11 – Deux résultats consécutifs identiques

a) À partir du deuxième lancer, chaque lancer reproduit le précédent avec probabilité $\frac{1}{6}$, indépendamment : $\mathbb{P}(T = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\frac{1}{6}$ pour $n \geq 2$.

b) $\mathbb{P}(T > 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \approx 0{,}194$.

c) Par symétrie entre les six faces (le premier lancer est uniforme et chaque lancer est uniforme), la valeur répétée suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$.

$$\mathbb{P}(\text{valeur répétée} = v) = \frac{1}{6}$$

Réponse. $T - 1 \sim G(\frac{1}{6})$; $\mathbb{P}(T > 10) \approx 0{,}194$; valeur répétée uniforme.

Correction de l’exercice 12 – Pièce truquée ou non

a) Bayes : $\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n + 1}$.

b) $\frac{2^n}{2^n+1} > 0{,}99 \Leftrightarrow 2^n > 99 \Leftrightarrow n \geq 7$.

c) Probabilités totales (conditionnellement à n piles) :

$$\frac{2^n}{2^n+1}\cdot 1 + \frac{1}{2^n+1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}+2}$$

Réponse. $\mathbb{P}(\text{truquée} \mid n \text{ piles}) = \frac{2^n}{2^n+1}$, $> 0{,}99$ dès $n = 7$; pile suivant : $\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}+2}$.

Correction de l’exercice 13 – Dés rangés dans l’ordre

a) Une suite strictement croissante est déterminée par l’ensemble de ses n valeurs : $\frac{\binom{6}{n}}{6^n}$.

b) Une suite croissante au sens large correspond à un multiensemble de n éléments de $\{1, \ldots, 6\}$, soit $\binom{n+5}{5}$ possibilités :

$$\mathbb{P}(\text{croissante}) = \frac{\binom{n+5}{5}}{6^n}$$

c) $n = 3$: $\frac{20}{216} = \frac{5}{54} \approx 0{,}093$ et $\frac{56}{216} = \frac{7}{27} \approx 0{,}259$.

Réponse. $\frac{\binom{6}{n}}{6^n}$ et $\frac{\binom{n+5}{5}}{6^n}$; pour $n = 3$: $\frac{5}{54}$ et $\frac{7}{27}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Le problème de la secrétaire

a) Le meilleur est en position k avec probabilité $\frac{1}{n}$. Si $k \leq r$, il est refusé. Si $k > r$, il est choisi si et seulement si le meilleur des $k-1$ premiers est parmi les r premiers, ce qui a probabilité $\frac{r}{k-1}$ (symétrie).

b) Avec $j = k-1$: $P_3 = \frac{3}{10}\sum_{j=3}^{9} \frac{1}{j} = \frac{3}{10}(H_9 - H_2) \approx \frac{3}{10} \times 1{,}329 \approx 0{,}399$.

c) $\frac{r}{n}\sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \approx x\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -x\ln x$, de dérivée $-\ln x - 1$, nulle en $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$:

$$P_{\max} \to \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$$

Réponse. $P_r = \frac{r}{n}\sum_{k>r} \frac{1}{k-1}$; $P_3 \approx 0{,}399$ pour $n = 10$; optimum $r \approx \frac{n}{\mathrm{e}}$, probabilité $\to \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : extinction d’une population

a) Si l’ancêtre n’a pas d’enfant, l’extinction est acquise ; s’il en a deux, leurs descendances sont indépendantes et doivent chacune s’éteindre en n générations : $x_{n+1} = q + px_n^2$.

b) Les événements « éteinte à la génération n » croissent, de réunion « extinction » : $x_n \uparrow x$ par continuité croissante, et l’on passe à la limite dans la récurrence.

c) Les racines de $pX^2 - X + q = 0$ sont 1 et $\frac{q}{p}$. Si $r \geq 0$ est racine, $x_0 = 0 \leq r$ et, $t \mapsto q + pt^2$ étant croissante sur $[0, +\infty[$, $x_n \leq r$ entraîne $x_{n+1} \leq q + pr^2 = r$. Donc $x \leq r$, et

$$x = \min\left(1, \frac{q}{p}\right)$$

Pour $p = \frac{2}{3}$: $x = \frac{1}{2}$; la population survit indéfiniment avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Réponse. $x_{n+1} = q + px_n^2$; extinction $x = \min(1, \frac{q}{p})$, soit $\frac{1}{2}$ pour $p = \frac{2}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).