# Plaquette 1 – Univers dénombrable, lois discrètes et conditionnement

## Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Espace probabilisé dénombrable.** $(\Omega, A, \mathbb{P})$ avec $\Omega$ au plus dénombrable.

— **$\sigma$-additivité** : pour des événements **deux à deux incompatibles**,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

— **Continuité croissante** : si $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

— **Continuité décroissante** : si $A_n \supset A_{n+1}$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

— **Sous-additivité** : $\mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

**Variable aléatoire discrète.** $X : \Omega \to \mathrm{K}$ avec $X(\Omega)$ au plus dénombrable ; sa **loi** est $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, famille de réels positifs de **somme** 1.

**Système complet d'événements dénombrable** $(A_n)$ : les $A_n$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $\Omega$ (à un négligeable près).

$$\mathbb{P}(B) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B \mid A_n)$$

**Lois usuelles discrètes infinies.**

— **Géométrique** $G(p)$ : $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour $k \geq 1$ ; **sans mémoire** :

$$\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$$

— **Poisson** $P(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \geq 0$.

**Fonction de répartition** : $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$, croissante, continue à droite, de limites 0 et 1.

## Correction de l'exercice 1 – Vérifier une loi

— **Condition de normalisation** : la somme doit valoir 1.

$$\sum_{k \geq 1} \frac{c}{2^k} = c \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = c \times \frac{1/2}{1 - 1/2} = c$$

— Donc $c = 1$.

— **Positivité** : $\dfrac{1}{2^k} > 0$ ✓

— **Loi obtenue** : c'est la loi **géométrique** de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.

— **Contrôle** : $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{4}$, etc., et la somme des premiers termes $0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 0{,}9375$ tend bien vers 1 ✓

— **Interprétation** : $X$ est le rang du premier **pile** lors de lancers successifs d'une pièce équilibrée.

**Réponse.** $c = 1$ : c'est la loi $G\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 2 – Loi géométrique

a) Chaque lancer est un succès avec probabilité $p = \frac{1}{6}$, indépendamment.

— $X = k$ signifie $k - 1$ échecs puis un succès :

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}, \qquad k \geq 1$$

— $X$ suit la loi **géométrique** $G\left(\frac{1}{6}\right)$.

— **Contrôle** : $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - 5/6} = 1$ ✓

b) $X > 5$ signifie que les 5 premiers lancers sont des **échecs**.

$$\mathbb{P}(X > 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = \frac{3125}{7776} \approx 0{,}4019$$

— **Interprétation** : il y a environ 40 % de chances de ne pas avoir obtenu de 6 après 5 lancers.

— **Formule générale** : $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$ — le plus utile des résultats sur la loi géométrique.

**Réponse.** a) $G\left(\frac{1}{6}\right)$ · b) $\left(\frac{5}{6}\right)^{5} \approx 0{,}402$.

## Correction de l'exercice 3 – Absence de mémoire

— **Formule de base** : $\mathbb{P}(X > m) = (1 - p)^m$.

— **Conditionnement** : comme $\{X > n + k\} \subset \{X > n\}$,

$$\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \frac{\mathbb{P}(X > n + k)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{(1 - p)^{n+k}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^k$$

— Ce qui est exactement $\mathbb{P}(X > k)$ ✓

— **Interprétation** : sachant qu'on a déjà échoué $n$ fois, la loi du **temps d'attente restant** est la même qu'au départ — le processus « oublie » son passé.

— **Unicité** : la géométrique est la **seule** loi discrète sans mémoire (son analogue continu étant la loi exponentielle).

— **Conséquence contre-intuitive** : après 10 lancers sans 6, la probabilité d'attendre encore 5 lancers est toujours $\left(\frac{5}{6}\right)^{5} \approx 0{,}40$ — le dé n'a pas de « dette ».

**Réponse.** $\frac{(1 - p)^{n+k}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^k$.

## Correction de l'exercice 4 – Loi de Poisson

On a $X \sim P(3)$, avec $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-3}\frac{3^k}{k!}$.

a) $\mathbb{P}(X = 2) = \mathrm{e}^{-3}\frac{9}{2} = 4{,}5\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}2240$.

b) **Complémentaire** : $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}9502$.

— **Contrôle de la normalisation** : $\sum_{k \geq 0} \mathrm{e}^{-3}\frac{3^k}{k!} = \mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{3} = 1$ ✓

— **Mode** : les valeurs les plus probables sont $k = 2$ et $k = 3$, toutes deux de probabilité $\approx 0{,}224$ — cohérent avec une moyenne de 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Origine** : la loi de Poisson est la **limite** d'une binomiale $B(n,p)$ quand $n \to \infty$ et $np \to \lambda$ — d'où son usage pour les événements **rares mais nombreux**.

**Réponse.** a) $\approx 0{,}224$ · b) $\approx 0{,}950$.

## Correction de l'exercice 5 – Continuité monotone

— Soit $A_n$ l'événement « obtenir au moins un pile parmi les $n$ premiers lancers ».
— La suite $(A_n)$ est **croissante**, et $\bigcup_n A_n = A$ (« au moins un pile un jour »).
— **Calcul** : $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (que des faces), donc $\mathbb{P}(A_n) = 1 - 2^{-n}$.
— **Continuité croissante** :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - 2^{-n}\right) = 1$$

— **Conclusion** : on obtient **presque sûrement** un pile.
— **Nuance importante** : l'événement contraire (« que des faces ») n'est **pas impossible** — il est de probabilité **nulle**. Probabilité nulle ≠ impossible sur un univers infini.
— **Généralisation** (Borel-Cantelli) : si les probabilités d'échec sont sommables, le succès finit presque sûrement par arriver.

**Réponse.** $\mathbb{P}(A_n) = 1 - 2^{-n} \to 1$ : événement presque sûr.

## Correction de l'exercice 6 – Probabilités totales dénombrables

On conditionne par $N$, qui forme un **système complet dénombrable**.

— Sachant $N = n$, $X \sim B(n,p)$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(N = n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

— On remplace $\mathbb{P}(N = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et on pose $m = n - k$ :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m \geq 0} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)}$$

— **Simplification** : $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$.
— **Conclusion** : $X \sim P(\lambda p)$ — la loi de Poisson est **stable par amincissement**.
— **Contrôle de cohérence** : le nombre moyen d'éclosions est $\lambda p$, soit « nombre moyen d'œufs × taux d'éclosion » ✓
— **Application numérique** : $\lambda = 10$, $p = 0{,}3$ donnent $X \sim P(3)$.

**Réponse.** $X \sim P(\lambda p)$.

## Correction de l'exercice 7 – Fonction de répartition

— Pour $t < 1$ : $F_X(t) = 0$ (le support commence à 1).
— Pour $t \geq 1$, notons $n = \lfloor t \rfloor$ :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \mathbb{P}(X > n) = 1 - (1-p)^n$$

— **Forme générale** : $F_X(t) = 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}$ pour $t \geq 1$.
— **Propriétés vérifiées** : $F_X$ est **croissante**, **en escalier** (sauts en chaque entier), **continue à droite**, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ ✓
— **Hauteur du saut en** $k$ : $F_X(k) - F_X(k^-) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1} p = \mathbb{P}(X = k)$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Application numérique** avec $p = \frac{1}{6}$ : $F_X(5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}598$.

**Réponse.** $F_X(t) = 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}$ pour $t \geq 1$.

## Correction de l'exercice 8 – Minimum de variables géométriques

On passe par la **queue** de distribution.

— $M > n$ signifie $X > n$ **et** $Y > n$ ; par indépendance,

$$\mathbb{P}(M > n) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n) = (1-p)^n(1-q)^n = [(1-p)(1-q)]^n$$

— On reconnaît la forme $\mathbb{P}(M > n) = (1-r)^n$ avec $1 - r = (1-p)(1-q)$.

— **Conclusion** : $M \sim G(r)$ avec

$$r = 1 - (1-p)(1-q) = p + q - pq$$

— **Interprétation** : $r$ est la probabilité qu'**au moins l'un** des deux processus réussisse à un instant donné ✓

— **Contrôle** : si $p = q = \frac{1}{2}$, alors $r = \frac{3}{4}$ ; le minimum de deux temps d'attente est bien plus court.

— **Généralisation** : le minimum de $n$ géométriques indépendantes de paramètre $p$ suit $G\left(1 - (1-p)^n\right)$.

**Réponse.** $M \sim G(p + q - pq)$.

## Correction de l'exercice 9 – Somme de variables de Poisson

**Convolution** : $\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)$.

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}$$

— Le **binôme de Newton** donne $\sum_k \binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} = (\lambda+\mu)^n$.

— **Conclusion** :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

— Donc $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$ — la loi de Poisson est **stable par somme**.

— **Contrôle des moyennes** : $\mathbb{E}(X + Y) = \lambda + \mu$ ✓

— **Application** : deux standards indépendants recevant 3 et 5 appels par minute en moyenne reçoivent ensemble $P(8)$ appels.

**Réponse.** $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.

## Correction de l'exercice 10 – Conditionnement d'une Poisson

— **Définition** :

$$\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) = \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)}$$

— **Numérateur** : $\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$.

— **Dénominateur** : $\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$ (exercice précédent).

— **Simplification** : les exponentielles disparaissent et il reste

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\binom{n}{k}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

— **Conclusion** : conditionnellement à $X+Y=n$, $X$ suit une loi **binomiale** $B\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

— **Interprétation** : sachant le total, chacun des $n$ événements provient de la première source avec probabilité $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, indépendamment — la connaissance du total « répartit » les événements.

— **Contrôle** : les probabilités somment bien à 1 (binôme) ✓

**Réponse.** $B\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

## Correction de l’exercice 11 – Marche aléatoire

— Pour revenir en 0 après $2n$ sauts, il faut exactement $n$ sauts $+1$ et $n$ sauts $-1$.

— Le nombre de trajectoires réalisant cela est $\binom{2n}{n}$, chacune de probabilité $p^n(1-p)^n$.

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n}p^n(1-p)^n$$

— **Cas symétrique** $p=\frac{1}{2}$ : $\mathbb{P} = \binom{2n}{n}4^{-n}$.

— **Valeurs** : $n=1$ donne $\frac{1}{2}$ ; $n=2$ donne $\frac{6}{16}=0{,}375$ ; $n=5$ donne $\frac{252}{1024}\approx 0{,}246$.

— **Équivalent (Stirling)** : $\binom{2n}{n}4^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ — décroissance lente en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

— **Conséquence célèbre** : $\sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ **diverge**, ce qui entraîne (critère de récurrence) que la marche symétrique repasse **une infinité de fois** par 0 presque sûrement.

— **Contrôle numérique** pour $n=5$ : $\frac{1}{\sqrt{5\pi}}\approx 0{,}252$, proche de 0,246 ✓

**Réponse.** $\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n$, soit $\binom{2n}{n}4^{-n}$ si $p=\frac{1}{2}$.

## Correction de l’exercice 12 – Formule de Bayes avec une infinité de causes

a) $(N=n)_{n\geq 1}$ est un système complet et $\mathbb{P}(B \mid N=n)=\frac{1}{2^n}$ :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$$

b) Bayes : $\mathbb{P}(N=1 \mid B) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1/3} = \frac{3}{4}$.

c) $\mathbb{P}(N=n \mid B) = \frac{3}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{3}{4}$ : sachant $B$, $N$ suit la loi géométrique $G\left(\frac{3}{4}\right)$.

**Réponse.** $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(N=1 \mid B)=\frac{3}{4}$ ; sachant $B$, $N\sim G(\frac{3}{4})$.

## Correction de l’exercice 13 – Loi d’un couple et lois marginales

a) $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{j}$ pour $1\leq i\leq j$, et 0 sinon. En sommant d’abord sur $i$ : $\sum_j \frac{1}{2^j}=1$.

b) $\mathbb{P}(X=1) = \sum_{j\geq 1}\frac{1}{j2^j} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2$.

c) $\mathbb{P}(X=2, Y=1)=0$ alors que $\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1)>0$ : pas indépendantes. Enfin

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j2^j}=\ln 2$$

**Réponse.** $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\frac{1}{j2^j}$ $(i\leq j)$ ; $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=Y)=\ln 2$ ; non indépendantes.

## Correction de l'exercice 14 – Indépendance deux à deux sans indépendance mutuelle

a) Chacun vaut $\frac{1}{2}$ (pour $C$ : $PP$ ou $FF$).

b) $A\cap B=\{PP\}$, $A\cap C=\{PP\}$, $B\cap C=\{PP\}$, tous de probabilité $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

c) Non :

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Connaissant $A$ et $B$, on connaît $C$.

**Réponse.** Deux à deux indépendants, mais $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}$ : pas mutuellement.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : problème des coupons

— **Situation** : on possède déjà $k-1$ vignettes distinctes ; chaque nouvel achat donne une vignette **nouvelle** avec probabilité

$$p_k=\frac{n-(k-1)}{n}$$

— Les achats étant **indépendants et identiques**, $T_k$ est le **temps d'attente du premier succès** :

$$T_k\sim G(p_k),\qquad \mathbb{P}(T_k=j)=(1-p_k)^{j-1}p_k$$

— **Exemple** ($n=50$) : $T_1\sim G(1)$ (le premier achat est toujours nouveau) ; $T_{50}\sim G\left(\frac{1}{50}\right)$ — la **dernière** vignette demande en moyenne 50 achats.

— **Nombre total** : $T=T_1+\ldots+T_n$, d'espérance

$$\mathbb{E}(T)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n-k+1}=n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=nH_n\approx n\ln n$$

— **Application** : pour $n=50$, $\mathbb{E}(T)=50\times H_{50}\approx 50\times 4{,}499\approx 225$ achats.

— **Leçon** : compléter une collection coûte bien plus que $n$ achats — l'essentiel du temps se passe à chercher les **dernières** vignettes.

**Réponse.** $T_k\sim G\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$ ; espérance totale $nH_n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).