# Plaquette 3 – Conditionnement, formule de Bayes et indépendance

## Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

### Méthode

Une expérience **en plusieurs étapes** se traite par la **formule des probabilités composées** (produit le long d'un chemin) et la **formule des probabilités totales** (somme sur un système complet décrivant la première étape). Pour « remonter » d'un effet observé à sa cause, on utilise **Bayes**. Quand l'expérience se répète d'elle-même (marche, ruine, chaîne à deux états), on **conditionne par le premier pas** et l'on obtient une **relation de récurrence** entre probabilités. L'**indépendance mutuelle** de $n$ événements exige toutes les égalités de produits, pas seulement deux à deux.

### Exercice 1 – La ruine du joueur équitable

Un joueur possède $k$ euros ($0 \leq k \leq N$) ; à chaque partie il gagne ou perd 1 euro avec probabilité $\frac{1}{2}$, et s'arrête à 0 (ruine) ou à $N$. On note $u_k$ la probabilité de ruine.

a) Montrer que $u_k = \frac{1}{2}(u_{k+1} + u_{k-1})$ pour $1 \leq k \leq N-1$, avec $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.

b) En déduire $u_k = 1 - \frac{k}{N}$.

c) Avec 10 euros face à un casino en possédant 990, quelle est la probabilité de ruine ?

### Exercice 2 – L'urne de Pólya

Une urne contient une boule blanche et une noire. On tire une boule, on la remet avec une boule supplémentaire de la même couleur, et l'on recommence.

a) Calculer la probabilité que les $n$ premiers tirages donnent une boule blanche.

b) Montrer que la probabilité d'obtenir une suite donnée de $k$ blanches et $n-k$ noires (dans un ordre fixé) vaut $\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$.

c) En déduire que le nombre de blanches tirées en $n$ tirages suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.

### Exercice 3 – Fiabilité d'un test de dépistage

Une maladie touche 0,1 % de la population. Un test est positif chez 99 % des malades et chez 2 % des personnes saines.

a) Calculer la probabilité qu'une personne testée positive soit malade.

b) On refait un second test, indépendant du premier conditionnellement à l'état de santé. Calculer la probabilité d'être malade après deux tests positifs.

c) Commenter.

### Exercice 4 – Une chaîne à deux états

S'il fait beau un jour, il fait beau le lendemain avec probabilité 0,8 ; s'il pleut, il fait beau le lendemain avec probabilité 0,4. On note $p_n$ la probabilité qu'il fasse beau le jour $n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $p_{n+1} = 0{,}4p_n + 0{,}4$.

b) En déduire $p_n$ en fonction de $p_0$, et sa limite.

c) Interpréter la limite comme une proportion de jours de beau temps « à l'équilibre ».

## Exercice 5 – Indépendance et complémentaires

a) Montrer que si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $A$ et $\overline{B}$ le sont, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

b) Soient $A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants. Montrer que $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ le sont encore.

c) En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i))$.

## Exercice 6 – Événement indépendant de lui-même

a) Montrer que $A$ est indépendant de lui-même si et seulement si $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

b) Montrer qu'un événement de probabilité 0 ou 1 est indépendant de tout événement.

c) Deux événements incompatibles de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

## Exercice 7 – Le problème de Monty Hall

Derrière trois portes se trouvent une voiture et deux chèvres, placées uniformément. Le candidat choisit la porte 1 ; l'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre une autre porte cachant une chèvre (au hasard s'il a le choix) et propose de changer.

a) On note $V_i$ : « la voiture est derrière la porte $i$ » et $O_3$ : « l'animateur ouvre la porte 3 ». Calculer $\mathbb{P}(O_3 \mid V_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

b) Calculer $\mathbb{P}(V_2 \mid O_3)$.

c) Le candidat a-t-il intérêt à changer ?

## Exercice 8 – Le paradoxe des deux enfants

Une famille a deux enfants, chacun étant indépendamment une fille ou un garçon avec probabilité $\frac{1}{2}$.

a) Sachant que l'aîné est un garçon, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

b) Sachant que l'un au moins est un garçon, même question.

c) Expliquer la différence.

## Exercice 9 – Règle de succession de Laplace

On dispose de $N+1$ urnes : l'urne $k$ contient $k$ boules blanches et $N-k$ noires. On choisit une urne uniformément, puis on y effectue des tirages avec remise.

a) Calculer la probabilité $\pi_n$ d'obtenir $n$ blanches lors des $n$ premiers tirages.

b) En déduire la probabilité que le tirage $n+1$ donne une blanche sachant que les $n$ premiers en ont donné.

c) Déterminer la limite de cette probabilité quand $N \to +\infty$ (sommes de Riemann).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

### Exercice 10 – Divisibilité et indicatrice d'Euler

On choisit $X$ uniformément dans $\{1, \dots, n\}$ et l'on note $D_d$ l'événement « $d$ divise $X$ ».

a) Pour $n = 12$, montrer que $D_2$ et $D_3$ sont indépendants ; pour $n = 10$, montrer qu'ils ne le sont pas.

b) Si $d \mid n$, calculer $\mathbb{P}(D_d)$, et montrer que les $D_p$, pour $p$ premier divisant $n$, sont mutuellement indépendants.

c) En déduire $\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers de $\{1, \dots, n\}$ premiers avec $n$.

### Exercice 11 – Nombre de lancers décidé par un dé

On lance un dé équilibré, qui donne $K$, puis on lance $K$ fois une pièce équilibrée.

a) Calculer la probabilité de n'obtenir aucun pile.

b) Sachant qu'on n'a obtenu aucun pile, quelle est la probabilité que le dé ait donné 1 ?

c) Sachant qu'on a obtenu exactement un pile, quelle est la loi conditionnelle de $K$ ?

### Exercice 12 – Transfert entre deux urnes

L'urne $U_1$ contient 2 blanches et 1 noire, l'urne $U_2$ contient 1 blanche et 2 noires. On transfère une boule de $U_1$ (au hasard) dans $U_2$, puis on tire une boule de $U_2$.

a) Calculer la probabilité de tirer une blanche.

b) Sachant qu'on a tiré une blanche, quelle est la probabilité que la boule transférée ait été blanche ?

c) Que deviennent ces résultats si l'on transfère deux boules ?

### Exercice 13 – Combien de conditions pour l'indépendance mutuelle ?

a) Combien d'égalités faut-il vérifier pour établir l'indépendance mutuelle de $n$ événements ?

b) Sur $\Omega = \{1, \dots, 8\}$ muni de la loi uniforme, on pose $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$. Montrer que $A$, $B$, $C$ sont mutuellement indépendants.

c) Sur le même $\Omega$, avec $C' = \{1, 6, 7, 8\}$, montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C') = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C')$ sans que $A$, $B$, $C'$ soient deux à deux indépendants.

### Exercice 14 – Probabilité conditionnelle et formule de chaîne

Soit $B$ un événement de probabilité non nulle.

a) Montrer que $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}(A \mid B)$ est une probabilité.

b) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap C \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(C \mid A \cap B)$ lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$.

c) On tire sans remise trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité que les trois soient des cœurs, sachant que la première est rouge.

### Exercice 15 – Synthèse : ruine face à un adversaire infiniment riche

On reprend la ruine du joueur avec probabilité de gain $p \neq \frac{1}{2}$ à chaque partie, $q = 1 - p$, $r = \frac{q}{p}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}$ et en déduire $u_k = \dfrac{r^k - r^N}{1 - r^N}$.

b) On note $R_N$ : « ruine avant d'atteindre $N$ », partant de $k$ fixé. Montrer que $(R_N)_{N>k}$ est croissante et que sa réunion est l'événement $R$ : « ruine en un temps fini ».

c) En déduire $\mathbb{P}(R)$ selon que $p < \frac{1}{2}$, $p > \frac{1}{2}$, et traiter aussi $p = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).