Plaquette 4 – Couples de variables aléatoires : lois conjointes, marginales et indépendance

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour un couple (X, Y) discret, tout se lit sur la **loi conjointe** $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$: les **marginales** s'obtiennent en sommant sur l'autre variable (probabilités totales), les **lois conditionnelles** en divisant par une marginale. L'**indépendance** se prouve en factorisant la loi conjointe en un produit (fonction de x) × (fonction de y), et se réfute avec un seul couple (x, y) où $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$ alors que les marginales sont non nulles. La loi d'une **somme** de variables indépendantes est une **convolution** ; celle d'un **maximum** ou d'un **minimum** se calcule via $\mathbb{P}(\max \leq n)$ ou $\mathbb{P}(\min > n)$.

Exercice 1 – Maximum de deux variables géométriques

Soient X, Y indépendantes de loi $G(p)$, $q = 1 - p$, et $M = \max(X, Y)$.

a) Calculer $\mathbb{P}(M \leq n)$, puis $\mathbb{P}(M = n)$.

b) Pour $p = \frac{1}{2}$, donner $\mathbb{P}(M = 1)$ et $\mathbb{P}(M = 2)$.

c) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 2 – Somme de deux variables géométriques

Soient X, Y indépendantes de loi $G(p)$, $q = 1 - p$, et $S = X + Y$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(S = n) = (n - 1)p^2 q^{n-2}$ pour $n \geq 2$.

b) Interpréter S en termes de lancers d'une pièce.

c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = n$.

Exercice 3 – Stabilité de la loi binomiale

Soient $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ indépendantes.

a) Montrer que $X + Y \sim B(n + m, p)$ (formule de Vandermonde).

b) Retrouver ce résultat sans calcul en représentant X et Y par des sommes de Bernoulli.

c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$.

Exercice 4 – Deux filtres successifs

Sur n pièces fabriquées, chacune passe un premier contrôle avec probabilité p, indépendamment ; on note N le nombre de pièces retenues. Chaque pièce retenue passe ensuite un second contrôle avec probabilité r, et l'on note X le nombre final.

a) Préciser la loi de N et la loi conditionnelle de X sachant $N = m$.

b) Montrer que $X \sim B(n, pr)$ (on pourra utiliser $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$).

c) Retrouver ce résultat sans calcul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une loi conjointe non produit

Soit (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ avec $\mathbb{P}(X = j, Y = k) = a\dfrac{j+k}{j!\,k!}$.

a) Déterminer a.
b) Déterminer la loi de X.
c) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 – Couple uniforme sur un triangle

Le couple (X, Y) est uniforme sur $T = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq j \leq n\}$.

a) Calculer $\text{card} T$ et les lois marginales.
b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = j$.
c) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et dire si X et Y sont indépendantes.

Exercice 7 – Lemme des coalitions

Soient X, Y, Z indépendantes de loi $G(p)$, $q = 1 - p$. On admet le lemme des coalitions : $\min(X, Y)$ et Z sont indépendantes.

a) Déterminer la loi de $\min(X, Y)$.
b) Calculer $\mathbb{P}(Z < \min(X, Y))$.
c) Application numérique pour $p = \frac{1}{2}$; pourquoi n'obtient-on pas $\frac{1}{3}$?

Exercice 8 – Fonctions de variables indépendantes

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et f, g deux fonctions.

a) Montrer que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
b) En déduire que si X et Y sont indépendantes à valeurs entières, les parités de X et de Y sont indépendantes.
c) Montrer par un exemple que $f(X)$ et $g(X)$ peuvent être indépendantes sans que $f(X)$ soit constante.

Exercice 9 – Loi de la différence de deux géométriques

Soient X, Y indépendantes de loi $G(p)$, $q = 1 - p$, et $D = X - Y$.

a) Pour $k \geq 0$, calculer $\mathbb{P}(D = k)$.
b) En déduire la loi de D sur $\mathbb{Z}$ et vérifier qu'il s'agit bien d'une loi.
c) Calculer $\mathbb{P}(D > 0)$.

Exercice 10 – Minimum et écart sont indépendants

Soient X, Y indépendantes de loi $G(p)$, $q = 1 - p$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

a) Calculer $\mathbb{P}(U = u, V = k)$ pour $u \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$.
b) En déduire que U et V sont indépendantes.
c) Interpréter avec l'absence de mémoire de la loi géométrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Indépendance d'indicatrices

a) Montrer que 1_A et 1_B sont indépendantes si et seulement si A et B le sont.

b) Soient $B_1, \dots, B_n$ indépendantes de loi $B(p)$ et $S = B_1 + \cdots + B_n$. Montrer que, sachant $S = k$, le vecteur $(B_1, \dots, B_n)$ est uniforme sur les $\binom{n}{k}$ configurations possibles.

c) En déduire $\mathbb{P}(B_1 = 1 \mid S = k)$.

Exercice 12 – Le problème du chevalier de Méré

a) On lance n dés équilibrés indépendants et l'on note M le plus grand résultat. Calculer $\mathbb{P}(M \leq k)$ et $\mathbb{P}(M = 6)$.

b) Le chevalier de Méré pariait sur « au moins un 6 en 4 lancers d'un dé ». Était-ce favorable ?

c) Il pariait aussi sur « au moins un double six en 24 lancers de deux dés ». Était-ce favorable ?

Exercice 13 – Indépendance deux à deux de variables

Soient X, Y indépendantes, uniformes sur $\{-1, 1\}$, et $Z = XY$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Montrer que X, Y, Z sont deux à deux indépendantes.

c) Sont-elles mutuellement indépendantes ?

Exercice 14 – Loi de la somme d'un dé et d'une pièce

On lance un dé équilibré (résultat D) et une pièce équilibrée ($P = 1$ si pile, 0 sinon), indépendamment ; on pose $S = D + 6P$.

a) Montrer que S suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, 12\}$.

b) S et D sont-elles indépendantes ? S et P ?

c) Montrer que D et P s'expriment en fonction de S, et commenter.

Exercice 15 – Synthèse : le partage d'une loi de Poisson

Le nombre N de clients entrant dans un magasin suit $P(\lambda)$. Chaque client achète avec probabilité p, indépendamment des autres et de N. On note X le nombre d'acheteurs et $Y = N - X$.

a) Calculer $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$.

b) En déduire les lois de X et de Y, et montrer qu'elles sont indépendantes.

c) Sachant $X = k$, quelle est la loi de N ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).