Plaquette 2 – Espaces probabilisés : tribus, continuité monotone et Borel-Cantelli

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un événement défini par une **infinité** de conditions (« finir par », « jamais », « une infinité de fois »), on l'écrit à l'aide de **réunions et d'intersections dénombrables** d'événements simples, puis on applique la σ**-additivité** (événements disjoints), la **continuité monotone** (suites croissantes ou décroissantes) ou la **sous-additivité**. Les événements « A_n se produit une infinité de fois » s'écrivent $\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$ et relèvent des lemmes de **Borel-Cantelli**.

Exercice 1 – Parties finies ou cofinies

Sur $\Omega = \mathbb{N}$, soit F l'ensemble des parties A telles que A ou $\mathbb{N} \setminus A$ soit fini.

a) Montrer que F contient Ω et est stable par complémentaire et par réunion finie.

b) Montrer que F n'est pas une tribu.

c) Quelle est la tribu engendrée par les singletons $\{n\}$?

Exercice 2 – Ne jamais obtenir pile

On lance indéfiniment une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants.

a) Soit A_n : « les n premiers lancers donnent face ». Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

b) En déduire la probabilité de ne jamais obtenir pile.

c) Montrer de même que, presque sûrement, on obtient une infinité de piles.

Exercice 3 – Un double six finit par arriver

On lance indéfiniment un dé équilibré.

a) Soit B_k : « les lancers $2k-1$ et $2k$ donnent tous deux 6 ». Les B_k sont-ils indépendants ? Calculer $\mathbb{P}(B_k)$.

b) Calculer la probabilité qu'aucun des $B_1, \dots, B_n$ ne se réalise, puis qu'aucun B_k ne se réalise.

c) En déduire que l'on obtient presque sûrement deux 6 consécutifs.

Exercice 4 – Premier lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements avec $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.

a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k)$, et en déduire $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

b) Soient $X_n \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$ $(n \geq 1)$. Montrer que $\mathbb{P}(X_n > 2\log_2 n) \leq \frac{2}{n^2}$.

c) En déduire que, presque sûrement, $X_n \leq 2\log_2 n$ à partir d'un certain rang (aucune hypothèse d'indépendance n'est nécessaire).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Second lemme de Borel-Cantelli et singe dactylographe

Soient (A_n) des événements mutuellement indépendants avec $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.

a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

b) En déduire $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

c) Un singe tape indéfiniment au hasard sur un clavier de 26 lettres (frappes indépendantes et uniformes). Montrer que le mot MATHS apparaît presque sûrement une infinité de fois.

Exercice 6 – Pas de probabilité uniforme sur les entiers

a) Montrer qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ telle que $\mathbb{P}(\{n\})$ soit indépendant de n.

b) On définit la densité $d(A) = \lim_n \frac{\operatorname{card}(A \cap \{1,\dots,n\})}{n}$ quand elle existe. Calculer $d(2\mathbb{N})$ et $d(\{n\})$.

c) Montrer que d n'est pas σ-additive.

Exercice 7 – Loi zêta et produit eulérien

Soit $s > 1$ et X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$, où $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$.

a) Pour $d \geq 1$, montrer que $\mathbb{P}(d \mid X) = \frac{1}{d^s}$.

b) Montrer que les événements $(p \mid X)$, p premier, sont mutuellement indépendants.

c) En considérant $(X = 1)$, en déduire $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ (limite des produits partiels).

Exercice 8 – Dérangements et formule du crible

On choisit une permutation σ uniforme de $\{1,\dots,n\}$ et l'on note A_i : « $\sigma(i) = i$ ».

a) Calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ pour $i_1 < \cdots < i_k$.

b) Par la formule du crible, montrer que la probabilité que σ n'ait aucun point fixe vaut $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

c) Déterminer la limite de p_n et majorer $|p_n - \mathrm{e}^{-1}|$.

Exercice 9 – Écrire un événement asymptotique

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$.

a) Écrire l'ensemble $\{\omega : (X_n(\omega)) \text{ est bornée}\}$ à l'aide de réunions et d'intersections dénombrables d'événements $(|X_n| \leq M)$.

b) Même question pour $\{\omega : X_n(\omega) \to 0\}$.

c) En déduire que ce sont des événements.

Exercice 10 – Événements négligeables et presque sûrs

a) Montrer qu'une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable, et qu'une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Montrer que toute suite infinie fixée de résultats a une probabilité nulle.

c) Montrer que l'ensemble des suites stationnaires (constantes à partir d'un certain rang) est négligeable.

Exercice 11 – Premier pile à un rang pair

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0,1[$ jusqu'au premier pile, obtenu au rang T.

a) Rappeler la loi de T et vérifier que T est presque sûrement fini.

b) Calculer $\mathbb{P}(T \text{ pair})$.

c) Pour quelle valeur de p cette probabilité vaut-elle $\frac{1}{4}$? Montrer qu'elle est toujours strictement inférieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 12 – Premier à faire six

Anna et Bruno lancent un dé équilibré à tour de rôle, Anna commençant ; le premier qui obtient 6 gagne.

a) Calculer la probabilité qu'Anna gagne au k-ième de ses lancers.

b) En déduire la probabilité qu'Anna gagne, puis que Bruno gagne.

c) Montrer que la partie se termine presque sûrement.

Exercice 13 – Probabilité sur les entiers et parité d'une loi de Poisson

a) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs de somme 1. Montrer qu'il existe une unique probabilité sur $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ avec $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$.

b) Soit $X \sim P(\lambda)$. Calculer $\mathbb{P}(X \text{ pair})$.

c) Montrer que cette probabilité est toujours strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 14 – Sauts de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

a) Montrer que F est continue à droite (continuité décroissante).

b) Montrer que F admet en tout x une limite à gauche égale à $\mathbb{P}(X < x)$, et en déduire $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$.

c) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de F est au plus dénombrable.

Exercice 15 – Synthèse : attendre deux piles consécutifs

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note (F_n) la suite de Fibonacci : $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Le motif PP et le motif FP font la course : montrer que PP apparaît avant FP si et seulement si les deux premiers lancers sont PP, et en déduire les probabilités de victoire.

b) Soit T le rang où apparaît pour la première fois PP (le second P). Montrer que $\mathbb{P}(T = n) = \frac{F_{n-1}}{2^n}$ pour $n \geq 2$, en admettant que le nombre de mots de longueur m

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sans deux P consécutifs vaut F_{m+2}.
c) Vérifier que $\sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(T = n) = 1$, sachant que $\sum_{m \geq 1} F_m x^m = \frac{x}{1 - x - x^2}$ pour $|x| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).