Plaquette 5 – Synthèse : problèmes classiques de probabilités discrètes

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les grands problèmes classiques se ramènent à quelques réflexes : **dénombrer** dans un univers équiprobable bien choisi, **conditionner par le premier pas** pour obtenir une récurrence, exploiter une **symétrie** (toutes les positions du maximum sont équiprobables, toutes les paires de joueurs aussi), passer à la **limite** par continuité monotone, et **comparer** à une loi limite (Poisson, équivalent de Stirling). On vérifie toujours qu'une loi obtenue est de somme 1 et l'on contrôle les cas extrêmes.

Exercice 1 – Le message déformé

Un message binaire (oui/non) est transmis par une chaîne de personnes ; chacune inverse le message reçu avec probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment. On note p_n la probabilité que le message soit correct après n transmissions.

a) Montrer que $p_{n+1} = (1-2p)p_n + p$.

b) En déduire $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n$.

c) Calculer p_{10} pour $p = 0{,}1$ et commenter la limite.

Exercice 2 – Records d'une permutation aléatoire

Soit σ une permutation uniforme de $\{1,\dots,n\}$. On dit que k est un record si $\sigma(k) > \sigma(i)$ pour tout $i < k$, et l'on note R_k cet événement.

a) Montrer que $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{k}$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(R_j \cap R_k) = \frac{1}{jk}$ pour $j < k$.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement un record, puis exactement n records.

Exercice 3 – Retour à l'origine d'une marche aléatoire

Une marche S_n sur $\mathbb{Z}$ part de 0 et fait des pas ± 1 indépendants équiprobables.

a) Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ et que $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$.

b) Donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

c) Dans le plan, une marche fait des pas $(\pm 1, 0)$ ou $(0, \pm 1)$ équiprobables. En posant $U = x + y$ et $V = x - y$, montrer que $\mathbb{P}(\text{retour en 0 au temps } 2n) = \left(\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi n}$.

Exercice 4 – Attendre de voir les deux faces

On lance une pièce équilibrée jusqu'à avoir obtenu au moins un pile et au moins un face ; on note T le nombre de lancers.

a) Déterminer la loi de T.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Vérifier que c'est une loi et calculer $\mathbb{P}(T > 5)$.

c) Montrer que $T - 1$ suit une loi géométrique, et expliquer pourquoi.

Exercice 5 – Le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de n personnes (anniversaires indépendants, uniformes sur 365 jours), on note q_n la probabilité que les anniversaires soient deux à deux distincts.

a) Montrer que $q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$.

b) Montrer que $q_n \leq \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right)$.

c) En déduire qu'à partir de 23 personnes, la probabilité d'une coïncidence dépasse $\frac{1}{2}$.

Exercice 6 – Approximation de Poisson

Soit $X_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ avec $\lambda > 0$ fixé.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout k.

b) Une machine produit 100 pièces, chacune défectueuse avec probabilité 0,02. Comparer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$ avec leurs approximations de Poisson.

c) Pourquoi parle-t-on de « loi des événements rares » ?

Exercice 7 – Les boîtes d'allumettes de Banach

Un mathématicien a deux boîtes de N allumettes, une dans chaque poche ; à chaque fois, il choisit une poche au hasard (probabilité $\frac{1}{2}$). On s'intéresse au moment où il trouve pour la première fois une boîte vide.

a) Montrer que la probabilité qu'il trouve la boîte de gauche vide alors que celle de droite contient k allumettes est $\binom{2N-k}{N}\frac{1}{2^{2N-k+1}}$.

b) En déduire la loi du nombre K d'allumettes restant dans l'autre boîte.

c) Vérifier le résultat pour $N = 1$.

Exercice 8 – Nombre de points fixes d'une permutation

Soit σ uniforme dans S_n et F_n son nombre de points fixes. On rappelle que la proportion de permutations de S_m sans point fixe vaut $d_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{j!}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(F_n = k) = \frac{d_{n-k}}{k!}$.

b) En déduire la limite de $\mathbb{P}(F_n = k)$ quand $n \to +\infty$.

c) Calculer $\mathbb{P}(F_4 = k)$ pour $k = 0, \ldots, 4$ et vérifier la somme.

Exercice 9 – Deux entiers aléatoires premiers entre eux

Soit $s > 1$ et X, Y indépendantes de loi zêta : $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$.

a) Pour $d \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(d \mid X \text{ et } d \mid Y)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que les événements $E_p = (p \mid X \text{ et } p \mid Y)$, p premier, sont mutuellement indépendants.

c) En déduire $\mathbb{P}(X \wedge Y = 1) = \frac{1}{\zeta(2s)}$ (utiliser le produit eulérien).

Exercice 10 – Rencontre dans un tournoi à élimination

Un tournoi à élimination directe réunit 2^n joueurs de même niveau (chaque match est gagné avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment), répartis au hasard dans le tableau. On fixe deux joueurs A et B.

a) Combien de matchs sont joués au total ?

b) Justifier que chaque match oppose une paire de joueurs uniformément répartie parmi les $\binom{2^n}{2}$ paires.

c) En déduire la probabilité que A et B se rencontrent. Application : $n = 3$.

Exercice 11 – Deux résultats consécutifs identiques

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir deux fois de suite le même résultat ; on note T le nombre de lancers.

a) Déterminer la loi de T.

b) Calculer $\mathbb{P}(T > 10)$.

c) Quelle est la loi de la valeur répétée ?

Exercice 12 – Pièce truquée ou non

Une boîte contient une pièce équilibrée et une pièce à deux faces pile. On en choisit une au hasard et on la lance n fois.

a) Sachant que l'on a obtenu n piles, quelle est la probabilité d'avoir la pièce truquée ?

b) À partir de combien de piles consécutifs cette probabilité dépasse-t-elle 0,99 ?

c) Sachant n piles, quelle est la probabilité que le lancer suivant donne pile ?

Exercice 13 – Dés rangés dans l'ordre

On lance n dés équilibrés ($1 \le n \le 6$) l'un après l'autre.

a) Calculer la probabilité que les résultats soient strictement croissants.

b) Calculer la probabilité qu'ils soient croissants au sens large (on dénombrera les suites croissantes par un argument « étoiles et barres »).

c) Application numérique pour $n = 3$.

Exercice 14 – Le problème de la secrétaire

On reçoit n candidats dans un ordre aléatoire uniforme ; on doit accepter ou refuser chacun immédiatement. Stratégie : refuser les r premiers ($1 \le r < n$), puis accepter le premier candidat meilleur que tous les précédents.

a) Montrer que la probabilité de choisir le meilleur vaut $P_r = \frac{r}{n} \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1}$ (conditionner par la position k du meilleur).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer P_3 pour $n = 10$.

c) Avec $r \sim xn$, montrer que $P_r \to -x \ln x$, maximal pour $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, et donner la probabilité limite.

Exercice 15 – Synthèse : extinction d'une population

Chaque individu a, indépendamment des autres, 0 enfant avec probabilité q ou 2 enfants avec probabilité $p = 1 - q$. On part d'un individu et l'on note x_n la probabilité que la population soit éteinte à la génération n ($x_0 = 0$).

a) En conditionnant par la première génération, montrer que $x_{n+1} = q + p x_n^2$.

b) Montrer que (x_n) croît vers la probabilité d'extinction x, et que x est solution de $x = q + px^2$.

c) Montrer que x est la plus petite racine positive, et en déduire $x = \min\left(1, \frac{q}{p}\right)$.

Application : $p = \frac{2}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).