Plaquette 1 – Univers dénombrable, lois discrètes et conditionnement

Variables aléatoires discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On modélise une expérience à univers **dénombrable**, on vérifie qu'une famille de réels est bien une **loi**, on utilise la **continuité monotone**, les **probabilités totales** dénombrables et le **conditionnement**.

Exercice 1 – Vérifier une loi

Pour quelle valeur de c la famille $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{c}{2^k}$, $k \geq 1$, définit-elle une loi de probabilité ?

Exercice 2 – Loi géométrique

On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. Soit X le nombre de lancers.

a) Donner la loi de X.

b) Calculer $\mathbb{P}(X > 5)$.

Exercice 3 – Absence de mémoire

Soit $X \sim G(p)$. Montrer que $\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 4 – Loi de Poisson

Un standard reçoit en moyenne 3 appels par minute, selon une loi de Poisson.

a) Probabilité de recevoir exactement 2 appels en une minute ?

b) Au moins un appel ?

Exercice 5 – Continuité monotone

On lance indéfiniment une pièce. Montrer que la probabilité d'obtenir **au moins un pile** vaut 1.

Exercice 6 – Probabilités totales dénombrables

Soit $N \sim P(\lambda)$ le nombre d'œufs pondés par un insecte ; chaque œuf éclôt avec probabilité p, indépendamment. Déterminer la loi du nombre X d'éclosions.

Exercice 7 – Fonction de répartition

Soit $X \sim G(p)$. Déterminer $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Minimum de variables géométriques

Soient X et Y indépendantes de lois $G(p)$ et $G(q)$. Déterminer la loi de $M = \min(X, Y)$.

Exercice 9 – Somme de variables de Poisson

Soient $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 10 – Conditionnement d'une Poisson

Avec $X \sim P(\lambda)$ et $Y \sim P(\mu)$ indépendantes, déterminer la loi de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 11 – Marche aléatoire

Une puce part de 0 et saute à chaque étape de $+1$ (probabilité p) ou -1. Calculer la probabilité qu'elle soit en 0 après $2n$ sauts.

Exercice 12 – Formule de Bayes avec une infinité de causes

On choisit un entier N avec $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$ $(n \geq 1)$, puis on lance N pièces équilibrées. On note B l'événement « toutes les pièces donnent pile ».

a) Calculer $\mathbb{P}(B)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(N = 1 \mid B)$.

c) Déterminer la loi de N sachant B et la reconnaître.

Exercice 13 – Loi d'un couple et lois marginales

On choisit $Y \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$, puis, sachant $Y = j$, X uniformément dans $\{1, \ldots, j\}$.

a) Donner $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ et vérifier que l'on obtient bien une loi.

b) Montrer que $\mathbb{P}(X = 1) = \ln 2$ (on rappelle $\sum_{j \geq 1} \frac{x^j}{j} = -\ln(1 - x)$).

c) X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 14 – Indépendance deux à deux sans indépendance mutuelle

On lance deux pièces équilibrées. Soient A : « la première donne pile », B : « la seconde donne pile », C : « les deux pièces donnent le même résultat ».

a) Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$.

b) Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants.

c) Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 15 – Synthèse : problème des coupons

Une collection comporte n vignettes différentes, équiprobables. Soit T_k le nombre d'achats nécessaires pour passer de $k - 1$ à k vignettes distinctes. Donner la loi de T_k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).