Plaquette 3 – Applications : limites, tangentes, extremums, asymptotes

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lecture d'un DL en a : si $f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_p h^p + o(h^p)$ avec $c_p \neq 0$,

$$f(a+h) - (c_0 + c_1 h) \sim c_p h^p$$

— p pair : la courbe reste d'un côté de la tangente (au-dessus si $c_p > 0$) ; si de plus $c_1 = 0$, **extremum local** (minimum si $c_p > 0$).

— p impair : la courbe traverse sa tangente, **point d'inflexion** ; si $c_1 = 0$, pas d'extremum.

— **Asymptote** : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$; si $c > 0$, courbe au-dessus de la droite.

— **Forme** 1^∞ : $u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$ et $\ln u \sim u - 1$ quand $u \to 1$.

— **Prolongement** : un DL d'ordre 1 en a équivaut à la dérivabilité en a.

Correction de l'exercice 1 – Différence de deux infinis

On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x} - 1\right)$. Avec $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$:

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{-2} + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

— Donc $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o(1) \to \frac{1}{3}$.

— $\sin x \sim x$ donne seulement $\frac{x^2}{\sin^2 x} \to 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{x^2} \cdot o(1)$: forme indéterminée. Il faut le **terme suivant** du DL. (Contrôle : en $x = 0{,}01$, on trouve 0,33334.)

Réponse. $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Formes 1 puissance infini

Toujours : $u^v = \exp(v \ln u)$, puis DL de $\ln u$.

a) $\frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \to -\frac{1}{2}$: limite $\mathrm{e}^{-1/2} \approx 0{,}607$.

b) Le logarithme vaut

$$n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

— limite $\mathrm{e}^{-1/2}$. (L'erreur classique : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \approx \mathrm{e}^n$ ferait croire à la limite 1.)

c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = 1 + 2h + o(h)$ donc $\ln \tan x \sim 2h$;
$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = -\frac{1}{\tan 2h} \sim -\frac{1}{2h}$. Produit $\to -1$: limite e^{-1}.

Réponse. a) $\mathrm{e}^{-1/2}$ · b) $\mathrm{e}^{-1/2}$ · c) e^{-1}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Limite en l'infini par changement de variable

On pose $u = \frac{1}{x} \to 0^+$.

— **Première** : $x - x^2 \ln(1+u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{u}{3} + o(u) \to \frac{1}{2}$.

Seconde : d'après le DL de $(1+u)^{1/u}$ (plaquette 2) :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1+u)^{1/u} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}u + o(u)$$

— donc $x\left((1+u)^{1/u} - \mathrm{e}\right) = \frac{1}{u}\left(-\frac{\mathrm{e}}{2}u + o(u)\right) \to -\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Réponse. $\frac{1}{2}$ puis $-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Correction de l'exercice 4 – Tangente et position

On développe jusqu'au premier terme non nul après le terme affine.

a) $\mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(1 - x + x^2) + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Tangente $y = 1$ (horizontale), courbe **au-dessus** : f a un **minimum local** en 0.

b) $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}$ avec $u = \sin x = x + o(x^2)$: $g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Tangente $y = x$, courbe **en dessous** des deux côtés.

c) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + o(x^3)$:

$$h(x) = \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

— tangente $y = 0$; $h(x)$ a le signe de x : la courbe **traverse** sa tangente, point d'**inflexion** en 0.

Réponse. a) $y = 1$, au-dessus (minimum) · b) $y = x$, en dessous · c) $y = 0$, inflexion.

Correction de l'exercice 5 – Nature d'un point critique

Au point critique, le signe de $f(x) - f(0)$ est celui du **premier terme non nul** du DL après la constante.

a) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$:

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

— $f(x) - 1 \sim \frac{x^4}{24} > 0$: **minimum local strict**.

b) $g(x) = \frac{x^5}{120} + o(x^5)$: change de signe, **pas d'extremum** (point d'inflexion à tangente horizontale).

c) $\mathrm{ch}\, x + \cos x = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$: **minimum local strict**.

— Dans les trois cas $f'(0) = 0$: le critère « $f'(0) > 0$ » ne conclut pas. Seul le premier terme non nul du DL tranche (ordre pair : extremum ; impair : non).

Réponse. a) minimum · b) pas d'extremum · c) minimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Asymptote d'une racine carrée

a) $\sqrt{1+v} = 1 + \frac{v}{2} - \frac{v^2}{8} + o(v^2)$ avec $v = u + u^2$:

$$\sqrt{1+u+u^2} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2) = 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2)$$

b) $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$: asymptote $y = x + \frac{1}{2}$, et $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{3}{8x} > 0$: courbe **au-dessus**.

c) Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$: $f(x) = -x\sqrt{1+u+u^2} = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Asymptote $y = -x - \frac{1}{2}$; $-\frac{3}{8x} > 0$ pour $x < 0$: encore **au-dessus**.

Réponse. $y = x + \frac{1}{2}$ en $+\infty$, $y = -x - \frac{1}{2}$ en $-\infty$; courbe au-dessus des deux.

Correction de l'exercice 7 – Asymptote avec une exponentielle

a) $u = \frac{1}{x} \to 0$:

$$x\,\mathrm{e}^{1/x} = \frac{1}{u}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

— Asymptote $y = x + 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$. $f(x) - (x+1) \sim \frac{1}{2x}$: courbe **au-dessus** en $+\infty$, **en dessous** en $-\infty$.

b) En 0^+ : $\frac{1}{x} \to +\infty$, $x\mathrm{e}^{1/x} = \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ avec $t = \frac{1}{x} \to +\infty$: limite $+\infty$ (croissances comparées). En 0^- : $\mathrm{e}^{1/x} \to 0$ et $x \to 0$: limite 0.

Réponse. Asymptote $y = x + 1$; au-dessus en $+\infty$, en dessous en $-\infty$; $+\infty$ en 0^+, 0 en 0^-.

Correction de l'exercice 8 – Asymptote avec l'arctangente

a) Avec $u = \frac{1}{x} \to 0^+$ et $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

b) $f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$: asymptote $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, courbe **au-dessus** ($\frac{1}{3x^2} > 0$).

c) f est paire (produit de deux fonctions impaires) : en $-\infty$, asymptote symétrique $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, courbe au-dessus également.

Réponse. $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ en $+\infty$, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ en $-\infty$; courbe au-dessus.

Correction de l'exercice 9 – Prolongement de classe C^1

a) $f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$ et $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + o(x)$$

b) $f(x) \to \frac{1}{2}$: on pose $f(0) = \frac{1}{2}$. Le DL d'ordre 1 en 0 du prolongement montre qu'il est **dérivable** en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{12}$.

c) Tangente : $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{12}$. (On montrerait de même que f est C^∞ : elle s'écrit comme quotient de séries entières.)

Réponse. $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = -\frac{1}{12}$; tangente $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{12}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Tangente à x puissance x

a) $(1+h)\ln(1+h) = (1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) = h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$, puis

$$f(1+h) = \exp\left(h + \frac{h^2}{2}\right) + o(h^2) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} + o(h^2) = 1 + h + h^2 + o(h^2)$$

b) Tangente $y = 1 + (x-1) = x$; $f(x) - x \sim (x-1)^2 > 0$: courbe au-dessus de la première bissectrice près de 1.

c) $x\ln x \to 0$ en 0^+ : $f(x) \to 1$, on pose $f(0) = 1$. Taux d'accroissement : $\frac{x^x - 1}{x} \sim \frac{x\ln x}{x} = \ln x \to -\infty$: **pas dérivable** en 0 (tangente verticale).

Réponse. $x^x = 1 + h + h^2 + o(h^2)$ en 1 ; tangente $y = x$, courbe au-dessus ; prolongement non dérivable en 0.

Correction de l'exercice 11 – Limite de suites par développements

On pose $h = \frac{1}{n} \to 0$ et on utilise $\mathrm{e}^u - 1 = u + O(u^2)$.

a) $\sqrt[n]{2} - 1 = \mathrm{e}^{h\ln 2} - 1 = h\ln 2 + O(h^2)$: $u_n \to \ln 2$.

b) $\cos h - 1 = -\frac{h^2}{2} + o(h^2)$: $v_n \to -\frac{1}{2}$.

c) $n^2 \ln\cos\frac{1}{n} = n^2\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to -\frac{1}{2}$: $w_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$.

d) $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$ avec $\frac{\ln n}{n} \to 0$:

$$n\left(\mathrm{e}^{\ln n/n} - 1\right) = n\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right) = \ln n + \frac{\ln^2 n}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$$

— donc $t_n \sim \frac{\ln^2 n}{2n} \to 0$.

Réponse. a) $\ln 2$ · b) $-\frac{1}{2}$ · c) $\mathrm{e}^{-1/2}$ · d) 0 (avec $t_n \sim \frac{\ln^2 n}{2n}$).

Correction de l'exercice 12 – Comparer deux fonctions près de 0

b) Ordre 5 pour $\tan(\sin x)$: avec $s = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $\tan s = s + \frac{s^3}{3} + \frac{2s^5}{15}$:

$$\tan(\sin x) = x + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + \frac{2}{15}\right)x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + o(x^5)$$

— (le terme $\frac{s^3}{3}$ apporte $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6}$). Le même calcul pour $\sin(\tan x)$ donne exactement le même DL à l'ordre 5 : il faut aller à l'ordre 7 pour les départager, d'où l'équivalent admis $\frac{x^7}{30}$.

a) La différence est positive pour $x > 0$ petit : $\tan(\sin x) > \sin(\tan x)$.

c) $x = 0{,}1$: $\frac{x^7}{30} \approx 3{,}3 \times 10^{-9}$, et le calcul numérique donne une différence de $3{,}4 \times 10^{-9}$ ✓ (l'écart relatif, 1 %, est de l'ordre de x^2) : les deux fonctions sont extraordinairement proches.

Réponse. $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \sim \frac{x^7}{30} > 0$.

Correction de l'exercice 13 – Distance d'une courbe à sa tangente

a) Taylor-Young à l'ordre 2 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) = \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2)$$

— d'où l'équivalent, puisque $f''(a) \neq 0$.

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$: erreur $\approx \frac{1}{8}x^2 = 5 \times 10^{-5}$. Exact : $1{,}01 - \sqrt{1{,}02} \approx 1{,}01 - 1{,}0099505 = 4{,}95 \times 10^{-5}$ ✓.

c) Ici $f''(0) = 0$: on va à l'ordre 3, $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$, erreur relative $\approx \frac{x^2}{6}$. Pour $x = 5° = 0{,}08727$ rad : $\frac{0{,}08727^2}{6} \approx 1{,}3 \times 10^{-3}$, soit 0,13 %. C'est l'approximation « des petits angles » en optique et en mécanique.

Réponse. $\delta(h) \sim \frac{|f''(a)|}{2}h^2$; b) 5×10^{-5} ; c) 0,13 %.

Correction de l'exercice 14 – Prolonger et étudier

On développe $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 : trois termes restent après division par x^2.

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

a) $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \to -\frac{1}{2}$: on pose $f(0) = -\frac{1}{2}$.

b) Le DL d'ordre 1 donne la dérivabilité, avec $f'(0) = \frac{1}{3}$.

c) Tangente $y = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$; $f(x) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) \sim -\frac{x^2}{4} < 0$: courbe **en dessous** de la tangente au voisinage de 0.

Réponse. $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{3}$; courbe sous la tangente.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude d'une racine cubique

a) $(1+v)^{1/3} = 1 + \frac{v}{3} - \frac{v^2}{9} + o(v^2)$ avec $v = \frac{3}{x}$:

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

— Asymptote $y = x + 1$; $-\frac{1}{x}$: courbe **en dessous** en $+\infty$, **au-dessus** en $-\infty$. (Ce calcul est valable pour $x < 0$ aussi : la racine cubique est impaire.)

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)} \sim \sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[3]{3}\,|x|^{2/3}$. Taux d'accroissement $\frac{f(x)}{x} \sim \sqrt[3]{3}\,\frac{|x|^{2/3}}{x} \to \pm\infty$: **non dérivable** ; $f \geq 0$ près de 0 et $f(0) = 0$: **point de rebroussement** (minimum local, tangente verticale).

c) $f(-3+h) = \sqrt[3]{(-3+h)^2 h} \sim \sqrt[3]{9h}$: taux $\frac{\sqrt[3]{9h}}{h} \to +\infty$: **tangente verticale** en $(-3, 0)$, point d'inflexion (la fonction change de signe et reste croissante).

d) Croissante sur $]-\infty, -2]$ (maximum local $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$ en -2, où $f' = 0$), décroissante sur $[-2, 0]$, croissante ensuite, collée à l'asymptote $y = x + 1$ aux deux infinis.

Réponse. Asymptote $y = x + 1$; rebroussement en 0 ; tangente verticale en -3 ; maximum $\sqrt[3]{4}$ en -2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).