Plaquette 2 – Calculs de développements limités

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

DL usuels en 0 (à l'ordre utile) :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \qquad (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2)$$

— $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$; $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.

— $\sin u = u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o(u^5)$; $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$.

— $\tan u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + o(u^5)$; $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$.

— **Primitivation** : si $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.

— **Parité** : le DL d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Correction de l'exercice 1 – DL d'un produit

$\sin x$ commence en x (valuation 1) : il suffit de développer e^x à l'ordre $4-1=3$, et $\sin x$ à l'ordre 4 (son terme en x^4 est nul) :

$$\mathrm{e}^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4)$$

— Terme en x : 1 ; en x^2 : 1 ; en x^3 : $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; en x^4 : $\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$.

— $f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

— **Contrôle** : $f' = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$, $f'' = 2\mathrm{e}^x \cos x$, $f''(0) = 2$, et le coefficient de x^2 est $\frac{f''(0)}{2} = 1$ ✓.

Réponse. $\mathrm{e}^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice 2 – DL de la tangente par quotient

a) $\cos x = 1 - w$ avec $w = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, et $\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + o(w^2)$:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

b) $\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right)$: en x^3, $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; en x^5, $\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{25 - 10 + 1}{120} = \frac{2}{15}$.

— $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

c) Si $\tan x = x + ax^3 + o(x^3)$, alors $\tan' = 1 + 3ax^2 + o(x^2)$ et $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o(x^2)$: $3a = 1$ ✓.

Réponse. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Logarithme du cosinus

On pose $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \to 0$. Comme $u = O(x^2)$, u^2 est d'ordre 4 et $u^3 = o(x^4)$: on développe $\ln(1+u)$ à l'ordre 2.

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

— $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.

— La limite demandée vaut $-\frac{1}{12}$.

— **Contrôle** : $(\ln\cos)' = -\tan x = -x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, dont la primitive nulle en 0 est $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$ ✓.

Réponse. $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$; limite $-\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 4 – Exponentielle d'un sinus

$u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ tend vers 0 ; on développe e^u à l'ordre 4 (car $u \sim x$) :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$$

— $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, $u^3 = x^3 + o(x^4)$, $u^4 = x^4 + o(x^4)$.

— En x^3 : $-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$; en x^4 : $-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{8}$.

— $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

— Le terme en x^3 disparaît par une compensation entre le $-\frac{x^3}{6}$ de sin et le $\frac{u^3}{6}$ de l'exponentielle : aucune raison de parité ici ($e^{\sin x}$ n'est ni paire ni impaire).

Réponse. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice 5 – Racine carrée d'une composée

$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$ avec $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$:

$$u^2 = x^2 + o(x^3), \qquad u^3 = x^3 + o(x^3)$$

— En x^3 : $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{16} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{16} = -\frac{1}{48}$.

— $\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$.

— $x = 0{,}1$: $1 + 0{,}05 - 0{,}00125 - 0{,}0000208 \approx 1{,}048729$ (valeur exacte : 1,048729…).

Réponse. $\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 6 – La fonction (1 + x) puissance 1/x

a) $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$.

b) $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$. Donc $f(x) = e\cdot e^v$ avec $v = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$:

$$f(x) = e\left(1 + v + \frac{v^2}{2}\right) + o(x^2) = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$$

c) Avec $x = \frac{1}{n}$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc la limite vaut $\frac{e}{2} \approx 1{,}359$. (C'est l'erreur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de la méthode d'Euler vue au chapitre équations différentielles.)

Réponse. $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + o(x^2)$; limite $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – DL d'une réciproque

a) $f' = 1 + 3x^2 > 0$, limites $\pm\infty$: bijection. f impaire donc g impaire (son DL n'a que des puissances impaires).

b) $g + g^3 = y$, avec $g^3 = y^3 + 3ay^5 + o(y^5)$:

$$y + (a+1)y^3 + (b+3a)y^5 + o(y^5) = y$$

— Identification : $a = -1$, puis $b = -3a = 3$. Donc $g(y) = y - y^3 + 3y^5 + o(y^5)$.

c) $g(0{,}1) \approx 0{,}1 - 0{,}001 + 0{,}00003 = 0{,}09903$. Contrôle : $0{,}09903^3 + 0{,}09903 \approx 0{,}0009712 + 0{,}09903 = 0{,}1000012$ ✓.

Réponse. $g(y) = y - y^3 + 3y^5 + o(y^5)$; solution $\approx 0{,}09903$.

Correction de l'exercice 8 – Arcsinus par primitivation

a) $(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2)$ avec $u = -t^2$:

$$(1-t^2)^{-1/2} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + o(t^4)$$

b) $\arcsin' = (1-t^2)^{-1/2}$ et $\arcsin 0 = 0$; on primitive : $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$.

c) $\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$: limite $\frac{1}{3}$.

Réponse. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$; limite $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 9 – DL en un point quelconque

a) Formule d'addition, puis DL de $\cos h$ et $\sin h$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{h^2}{4} + o(h^2)$$

b) $h = 0{,}1$: $0{,}5 - 0{,}0866025 - 0{,}0025 = 0{,}4108975$, soit un écart de $1{,}5 \times 10^{-4}$, de l'ordre du terme suivant $\frac{\sqrt{3}}{12}h^3 \approx 1{,}4 \times 10^{-4}$ ✓.

c) $\mathrm{e}^{1+h} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^h = \mathrm{e}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\right) + o(h^3)$.

Réponse. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{h^2}{4} + o(h^2)$.

Correction de l'exercice 10 – Calculer ln 2 avec un DL

a) $g(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$; les termes pairs se simplifient :

$$g(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + o(x^5)$$

b) $\frac{1+x}{1-x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. D'où $\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}\right) \approx 0{,}693004$.

c) Erreur $1{,}4 \times 10^{-4}$ avec trois termes. Le DL de $\ln(1+x)$ en $x = 1$ n'a pas de sens au voisinage de 0 (1 n'est pas « petit ») et la série correspondante converge très lentement (erreur $\approx \frac{1}{n}$). Ici $x = \frac{1}{3}$ est petit et les termes décroissent comme $\frac{1}{9^k}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $g(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + o(x^5)$; $\ln 2 \approx 0{,}693004$.

Correction de l'exercice 11 – Approximation rationnelle du cosinus

a) $\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 + o(x^4)$, donc

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + (b^2 - ab)x^4 + o(x^4)$$

b) On identifie avec $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$: $a - b = -\frac{1}{2}$ et $b(b-a) = \frac{b}{2} = \frac{1}{24}$. D'où $b = \frac{1}{12}$, $a = -\frac{5}{12}$:

— $\cos x \approx \dfrac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2} = \dfrac{12 - 5x^2}{12 + x^2}$.

c) En $x = 1$: $\frac{7}{13} \approx 0{,}538462$; DL d'ordre 4 : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \approx 0{,}541667$; $\cos 1 \approx 0{,}540302$. Erreurs $1{,}8 \times 10^{-3}$ et $1{,}4 \times 10^{-3}$: comparables (l'approximation rationnelle, dite de **Padé**, a l'avantage de rester bornée pour x grand).

Réponse. $a = -\frac{5}{12}$, $b = \frac{1}{12}$: $\cos x \approx \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2}$.

Correction de l'exercice 12 – Les nombres de Bernoulli

a) On inverse $1 + w$ avec $w = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}$, en calculant les coefficients de proche en proche : si $\varphi = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$, le produit $(1+w)\varphi = 1$ donne

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{c_1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, \quad c_3 = -\frac{c_2}{2} - \frac{c_1}{6} - \frac{1}{24} = 0$$

— puis $c_4 = -\frac{c_3}{2} - \frac{c_2}{6} - \frac{c_1}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}$.

— $\varphi(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$.

b) $\varphi(-x) = \frac{-x}{\mathrm{e}^{-x} - 1} = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = \varphi(x) + x$, donc $\varphi(-x) - \frac{x}{2} = \varphi(x) + \frac{x}{2}$: paire. Au-delà du terme $-\frac{x}{2}$, le DL ne contient que des puissances paires, ce qui explique $c_3 = 0$ (et $c_5 = c_7 = \ldots = 0$).

Réponse. $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice 13 – DL d'une fonction définie par une intégrale

a) $\mathrm{e}^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4)$. On intègre entre x et $2x$ (le reste s'intègre en $o(x^5)$) :

$$F(x) = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} \right]_x^{2x} + o(x^5) = x - \frac{7x^3}{3} + \frac{31x^5}{10} + o(x^5)$$

— en utilisant $(2x)^3 - x^3 = 7x^3$ et $(2x)^5 - x^5 = 31x^5$.

b) $F(x) \sim x$; tangente $y = x$; $F(x) - x \sim -\frac{7x^3}{3}$: la courbe est **sous** sa tangente pour $x > 0$ petit, au-dessus pour $x < 0$: point d'inflexion en 0 (cohérent avec l'imparité de F).

Réponse. $F(x) = x - \frac{7x^3}{3} + \frac{31x^5}{10} + o(x^5)$; inflexion en 0.

Correction de l'exercice 14 – Choisir le bon ordre

a) On divise par x^3 : il faut $\sin x - x$ à l'ordre $3 + 2 = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2)$$

b) $\frac{\sin x}{x} = 1 + u$ avec $u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$, $u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$:

— $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{72}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$.

c) $\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6} + o(1)$: la limite est $\mathrm{e}^{-1/6} \approx 0{,}846$.

Réponse. a) $-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2)$ · b) $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$ · c) $\mathrm{e}^{-1/6}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une fonction implicite

a) $h(y) = y + \mathrm{e}^y$ est continue, strictement croissante, de limites $\mp\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et $\varphi = h^{-1}(1 + \cdot)$. $h(0) = 1$ donne $\varphi(0) = 0$.

b) $\mathrm{e}^{\varphi} - 1 = \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^3}{6} + o(x^3)$, donc $2\varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^3}{6} = x + o(x^3)$. Avec $\varphi^2 = a^2x^2 + 2abx^3$ et $\varphi^3 = a^3x^3$:

$$2a = 1, \qquad 2b + \frac{a^2}{2} = 0, \qquad 2c + ab + \frac{a^3}{6} = 0$$

— $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{16}$, $c = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32} + \frac{1}{48}\right) = \frac{1}{192}$.

c) $h'(y) = 1 + \mathrm{e}^y$, $h'(0) = 2$: $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$ ✓.

d) $x = 0{,}2$: $0{,}1 - 0{,}0025 + 0{,}0000417 \approx 0{,}097542$. Contrôle : $0{,}097542 + \mathrm{e}^{0{,}097542} \approx 0{,}097542 + 1{,}102458 = 1{,}2000$ ✓.

Réponse. $\varphi(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{192} + o(x^3)$; solution $\approx 0{,}09754$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).