Plaquette 5 – Développements asymptotiques et approximations en sciences

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développements à connaître (en $u \to 0$) :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2), \qquad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

— **Somme harmonique** : $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

— **Stirling** : $n! = \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{\mathrm{e}})^n\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

— **Échelle de comparaison** en $+\infty$:
$\ldots \ll \frac{1}{x} \ll \frac{\ln x}{x} \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln\ln x \ll \ln x \ll \ldots$

— **Réinjection** : si $x = F(x,\varepsilon)$ et $x = x_0 + O(\varepsilon)$, alors $x = F(x_0,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ quand F est lipschitzienne de rapport $O(\varepsilon)$ en x.

— **Newton** : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; l'erreur vérifie $e_{n+1} \approx \frac{f''(\ell)}{2f'(\ell)}e_n^2$.

Correction de l'exercice 1 – Développement d'une différence en l'infini

On factorise le terme dominant : $\sqrt{x^4+x} = x^2\sqrt{1+u}$ avec $u = \frac{1}{x^3} \to 0$, et

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

— $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

— $x = 10$: $\sqrt{10\,010} - 100 \approx 0{,}0499875062$; développement : $0{,}05 - 0{,}0000125 = 0{,}0499875$ ✓.

— **Remarque** : le second terme est en $\frac{1}{x^4}$, pas en $\frac{1}{x^2}$: il faut suivre les puissances de $u = x^{-3}$.

Réponse. $\sqrt{x^4+x} - x^2 = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Affiner la limite de (1 + 1/n) puissance n

a) $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis avec $v = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}$:

$$\mathrm{e}^{1+v} = \mathrm{e}\left(1 + v + \frac{v^2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{8n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

— et $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$.

b) Un terme : $\mathrm{e} \approx 2{,}718282$ (erreur 0,12). Trois termes : $\mathrm{e}(1 - 0{,}05 + 0{,}004583) \approx 2{,}594827$ (erreur $1{,}1 \times 10^{-3}$).

c) $\frac{11\mathrm{e}}{24} \approx 1{,}246$.

Réponse. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2n} + \frac{11\mathrm{e}}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Somme harmonique entre n et 2n

a) $S_n = H_{2n} - H_n$; les γ se simplifient :

$$S_n = \ln(2n) - \ln n + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} + O\!\left(\frac{1}{n^2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{4n} + O\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

b) $\ln 2 - \frac{1}{40} \approx 0{,}668147$; écart $6{,}2 \times 10^{-4}$, soit environ $\frac{1}{16n^2} = 6{,}25 \times 10^{-4}$: c’est bien un $O\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

c) $H_{n^2} - 2H_n = \ln n^2 + \gamma + \frac{1}{2n^2} - 2\ln n - 2\gamma - \frac{1}{n} + O\!\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\gamma - \frac{1}{n} + O\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Réponse. $S_n = \ln 2 - \frac{1}{4n} + O\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $H_{n^2} - 2H_n = -\gamma - \frac{1}{n} + O\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Correction de l’exercice 4 – Racine n-ième de n

a) $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{u}$ avec $u = \frac{\ln n}{n} \to 0$; $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + O(u^3)$, et

$$u^3 = \frac{\ln^3 n}{n^3} = o\!\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

— d’où le développement annoncé.

b) $n = 100$: $1 + 0{,}0460517 + 0{,}0010604 = 1{,}0471121$, écart $1{,}6 \times 10^{-5}$ de l’ordre de $\frac{u^3}{6} \approx 1{,}6 \times 10^{-5}$ ✓.

c) La limite vaut $\frac{1}{2}$.

Réponse. $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\!\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Correction de l’exercice 5 – Cosinus et sinus de π√(n² + 1)

a) $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\!\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = n + \frac{1}{2n} + O\!\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

b) $\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin\theta$ et $\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta$, avec $\theta = \frac{\pi}{2n} + O\!\left(\frac{1}{n^3}\right) \to 0$:

$$\sin\!\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n \sin\theta \sim (-1)^n \frac{\pi}{2n}$$

— et $(-1)^n \cos\!\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \cos\theta \to 1$.

c) $\frac{\pi}{20} \approx 0{,}15708$, contre $0{,}15605$: écart relatif $0{,}7\,\%$, dû au terme $-\frac{\theta^3}{6}$.

Réponse. $\sin\!\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \sim (-1)^n \frac{\pi}{2n}$; $(-1)^n \cos(\ldots) \to 1$.

Correction de l’exercice 6 – Coefficient binomial central

a) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et Stirling :

$$\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} = \frac{2\sqrt{\pi n}\cdot 4^n}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

b) $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} \approx 187\,079$, soit $1{,}3\,\%$ de plus que la valeur exacte (erreur relative $\approx \frac{1}{8n}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $P = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Pour $n = 50$: $\frac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx 0{,}0798$ (exact : 0,0796). Moins de 8 % de chances d'avoir exactement 50 piles sur 100 lancers : cette probabilité tend vers 0, lentement.

Réponse. $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$; $P(\text{50 piles sur 100}) \approx 0{,}080$.

Correction de l'exercice 7 – Période du pendule aux grandes amplitudes

L'erreur relative est donnée par le premier terme correctif :

$$\frac{T - T_0}{T_0} \approx \frac{\theta_0^2}{16} \quad (\theta_0 \text{ en radians})$$

a) $\theta_0 = \frac{20\pi}{180} \approx 0{,}349$: $\frac{0{,}349^2}{16} \approx 0{,}0076$, soit 0,76 %.

b) La période relative passe de $1 + \frac{\theta_1^2}{16}$ à $1 + \frac{\theta_2^2}{16}$: augmentation relative $\approx \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{16} = \frac{(0{,}10472)^2 - (0{,}08727)^2}{16} \approx 2{,}1 \times 10^{-4}$. Sur 86 400 s : environ 18 s de retard par jour.

c) $\frac{\theta_0^2}{16} \le 10^{-3} \Leftrightarrow \theta_0 \le \sqrt{0{,}016} \approx 0{,}126$ rad, soit 7,2°.

Réponse. a) 0,76 % · b) environ 18 s par jour · c) $\theta_0 \le 7{,}2°$.

Correction de l'exercice 8 – Énergie cinétique relativiste

a) $(1-u)^{-1/2} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2)$ avec $u = \beta^2$:

$$E_c = mc^2\left(\frac{\beta^2}{2} + \frac{3\beta^4}{8} + o(\beta^4)\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3mv^4}{8c^2} + o\left(\frac{v^4}{c^2}\right)$$

b) Le premier terme est l'énergie cinétique de Newton ; la correction relative vaut $\frac{3\beta^4/8}{\beta^2/2} = \frac{3}{4}\beta^2$.

c) $\beta = 0{,}1$: $\frac{E_c}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{1/\sqrt{0{,}99} - 1}{0{,}005} \approx 1{,}00756$, contre $1 + \frac{3}{4} \times 0{,}01 = 1{,}0075$ par le développement : l'énergie classique est sous-estimée de 0,76 %.

Réponse. $E_c = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{3}{4}\beta^2 + o(\beta^2)\right)$; 0,75 % d'écart à $0{,}1c$.

Correction de l'exercice 9 – Pesanteur en altitude

a) $(1+u)^{-2} = 1 - 2u + 3u^2 + o(u^2)$ avec $u = \frac{h}{R}$:

$$\frac{g(h)}{g_0} = 1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} + o\left(\frac{h^2}{R^2}\right)$$

b) $u = \frac{400}{6370} \approx 0{,}0628$: exact 0,8853 ; ordre 1 : 0,8744 ; ordre 2 : 0,8862. L'ordre 2 réduit l'erreur de 1,1 % à 0,1 %. (Il reste 88 % de la pesanteur : les astronautes flottent parce qu'ils sont en chute libre, pas parce que g est nulle.)

c) $\frac{2h}{R} = 0{,}01 \Leftrightarrow h = 0{,}005R \approx 32$ km.

Réponse. $\frac{g}{g_0} = 1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} + \dots$; ISS : 0,885 ; −1 % à 32 km.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Racine perturbée

a) $x^2 = 1 + 2a\varepsilon + (a^2 + 2b)\varepsilon^2 + (2c + 2ab)\varepsilon^3$; en reportant dans $x^2 - x = \varepsilon$:

$$a\varepsilon + (a^2 + b)\varepsilon^2 + (c + 2ab)\varepsilon^3 = \varepsilon$$

— $a = 1$, $b = -a^2 = -1$, $c = -2ab = 2$. Donc $x = 1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$.

b) $\sqrt{1 + 4\varepsilon} = 1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$ (DL de $(1+u)^{1/2}$ à l'ordre 3) : on retrouve le même résultat après division par 2.

c) Les racines ont pour somme 1 : l'autre vaut $-\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$. Pour $\varepsilon = 0{,}1$: 1,092 et −0,092, contre 1,09161 et −0,09161 exactement.

Réponse. $x = 1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$ et $-\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$.

Correction de l'exercice 11 – Équation de Kepler aux faibles excentricités

a) $|E - M| = e|\sin E| \le e$: $E = M + O(e)$. Puis $\sin E = \sin M + O(E - M) = \sin M + O(e)$ (le sinus est 1-lipschitzien), donc $E = M + e\sin M + O(e^2)$.

b) Avec $E = M + e\sin M + O(e^2)$, un DL d'ordre 1 du sinus en M donne

$$\sin E = \sin M + e\sin M\cos M + O(e^2) = \sin M + \frac{e}{2}\sin 2M + O(e^2)$$

— d'où $E = M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + O(e^3)$.

c) $1 + 0{,}2\sin 1 + 0{,}02\sin 2 \approx 1 + 0{,}168294 + 0{,}018186 = 1{,}186480$, écart $1{,}2 \times 10^{-3}$, de l'ordre de $e^3 = 0{,}008$ multiplié par un coefficient modéré ✓. Chaque réinjection gagne un ordre en e.

Réponse. $E = M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + O(e^3)$.

Correction de l'exercice 12 – Le paradoxe des anniversaires

a) $\ln p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{365}\right) \approx -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{365}$ et

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \quad\Longrightarrow\quad \ln p_n \approx -\frac{n(n-1)}{730}$$

b) $\mathrm{e}^{-506/730} \approx 0{,}5000$, contre 0,4927 : l'erreur (1,5 %) vient des termes négligés $-\frac{k^2}{2\cdot 365^2}$, tous négatifs.

c) $p_n \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow n(n-1) \ge 730\ln 2 \approx 506$, soit $n \ge 23$. Avec seulement 23 personnes, une coïncidence est plus probable que l'inverse : c'est le « paradoxe », qui vient de ce que le nombre de **paires** croît comme $\frac{n^2}{2}$.

Réponse. $p_n \approx \mathrm{e}^{-n(n-1)/730}$; 50 % de coïncidence dès $n = 23$.

Correction de l'exercice 13 – Vitesse de la méthode de Newton

a) $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$.

b) $0 = f(\ell) = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(x_n)}{2}e_n^2 + o(e_n^2)$ (Taylor en x_n). Donc

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}e_n^2 + o(e_n^2) \sim \frac{f''(\ell)}{2f'(\ell)}e_n^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Ici $\frac{f'}{2f} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, cohérent avec a).

c) $e_0 \approx 0{,}0858$; $e_1 \approx 2{,}45 \times 10^{-3}$; $e_2 \approx 2{,}12 \times 10^{-6}$; $e_3 \approx 1{,}6 \times 10^{-12}$. Le nombre de décimales exactes **double** à chaque itération : convergence **quadratique**.

Réponse. $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n}$; erreurs $2{,}5 \times 10^{-3}$, $2{,}1 \times 10^{-6}$, $1{,}6 \times 10^{-12}$.

Correction de l'exercice 14 – Développement à plusieurs échelles

On factorise le terme dominant et l'on développe le logarithme du reste.

a) $\ln(x + \ln x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$ avec $\frac{\ln x}{x} \to 0$:

$$f(x) = \ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

b) $\ln g(x) = \ln^2 x - x \ln\ln x$. Or $\ln^2 x = o(x \ln\ln x)$ (car $\frac{\ln^2 x}{x} \to 0$ et $\ln\ln x \to +\infty$) : $\ln g(x) = -x \ln\ln x + \ln^2 x$, deux termes d'échelles différentes, et $g(x) \to 0$.

c) $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ donne, en prenant le logarithme (limite infinie) : $h(n) = 2n \ln 2 - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln \pi + o(1)$.

Réponse. a) $\ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ · b) $-x \ln\ln x + \ln^2 x$ · c) $2n \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(\pi n) + o(1)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : réciproque de x e^x en l'infini

a) W est croissante et non bornée (réciproque d'une bijection croissante de $[0, +\infty[$). En prenant le logarithme de $We^W = y$: $\ln W + W = \ln y$.

b) $\ln W = o(W)$, donc $W + o(W) = \ln y$: $W(y) \sim \ln y$.

c) Posons $L = \ln y$. De $W \sim L$: $\ln W = \ln L + o(1)$ (logarithme d'équivalents de limite infinie, sous la forme $\ln W - \ln L = \ln \frac{W}{L} \to 0$). D'où $W = L - \ln L + o(1)$. On réinjecte :

$$\ln W = \ln L + \ln\left(1 - \frac{\ln L}{L} + o\left(\frac{1}{L}\right)\right) = \ln L - \frac{\ln L}{L} + o\left(\frac{\ln L}{L}\right)$$

— donc $W = L - \ln L + \frac{\ln L}{L} + o\left(\frac{\ln L}{L}\right)$.

d) $L = 13{,}8155$, $\ln L = 2{,}6258$: deux termes 11,1897 (écart 0,19), trois termes 11,3798 (écart 0,004) ✓. La convergence est lente car les termes successifs ne décroissent que comme des puissances de $\ln y$.

Réponse. $W(y) = \ln y - \ln\ln y + \frac{\ln\ln y}{\ln y} + o\left(\frac{\ln\ln y}{\ln y}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).