Plaquette 1 – Équivalents, négligeabilité et développements limités

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Relations de comparaison en a (ici u et v ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf en a).

— $f \underset{a}{\sim} g$ signifie $\frac{f}{g} \to 1$. $f = o(g)$ signifie $\frac{f}{g} \to 0$.

— **Compatibilité** : les équivalents se **multiplient**, se **divisent**, s'élèvent à une puissance. Ils ne s'**additionnent pas** et ne se **composent pas** avec ln, exp, sin sans précaution.

— $f \sim g \Rightarrow f$ et g ont **même signe** et **même limite** au voisinage de a.

Équivalents usuels en 0 :

$$\sin x \sim x \quad \tan x \sim x \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \ln(1+x) \sim x \quad \mathrm{e}^x - 1 \sim x \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

Développements limités en 0 :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en a,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

Règle d'or : pour un DL de produit ou de quotient à l'ordre n, on garde tous les facteurs à l'ordre n ; pour une composition, on ajuste l'ordre selon la valuation.

Correction de l'exercice 1 – Équivalents simples

On applique les équivalents usuels **après avoir identifié la quantité qui tend vers** 0.

— a) $3x \to 0$, donc $\sin(3x) \sim 3x$.

— b) $x^2 \to 0$, donc $\ln(1+x^2) \sim x^2$.

— c) $2x \to 0$, donc $\mathrm{e}^{2x} - 1 \sim 2x$.

— **Contrôle numérique** en $x = 0{,}01$: $\sin(0{,}03) = 0{,}0299955$ contre $0{,}03$; $\mathrm{e}^{0{,}02} - 1 = 0{,}0202$ contre $0{,}02$. Les écarts relatifs sont de l'ordre de x, comme attendu.

— **Piège** : $\sin(3x) \sim x$ est **faux** — le facteur multiplicatif compte.

Réponse. a) $3x$ · b) x^2 · c) $2x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Limite par équivalents

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On remplace **numérateur et dénominateur** par leurs équivalents.

— $\sin(2x) \sim 2x$ et $\ln(1+3x) \sim 3x$.
— L'équivalence étant compatible avec le **quotient** :

$$\frac{\sin(2x)}{\ln(1+3x)} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

— Un équivalent constant donne directement la limite : $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$.
— **Contrôle** en $x = 0{,}001$: $\frac{\sin(0{,}002)}{\ln(1{,}003)} \approx \frac{0{,}0019999}{0{,}0029955} \approx 0{,}6676$. Cohérent.

Réponse. $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 3 – Piège de l'addition

L'erreur : les équivalents ne sont **pas compatibles avec l'addition**. De $\sin x \sim x$ on ne peut pas soustraire x des deux côtés ; d'ailleurs « ~ 0 » n'a pas de sens (on ne peut pas être équivalent à la fonction nulle).

La bonne méthode : passer par un **développement limité** d'ordre suffisant.

— $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
— Le premier terme non nul donne l'équivalent : $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$.
— **Contrôle** en $x = 0{,}1$: $\sin(0{,}1) - 0{,}1 = -1{,}6658 \times 10^{-4}$ et $-\frac{0{,}001}{6} \approx -1{,}6667 \times 10^{-4}$. Cohérent.
— **Règle à retenir** : dès qu'il y a **soustraction de termes de même ordre**, abandonner les équivalents et passer au DL.

Réponse. $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$ (les équivalents ne s'additionnent pas).

Correction de l'exercice 4 – DL d'un produit

On développe chaque facteur à l'ordre 3.

— $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
— **Produit**, en ne gardant que les termes de degré ≤ 3 :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

— Coefficient de x^3 : $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
— **Résultat** : $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
— **Contrôle** en $x = 0{,}1$: la valeur exacte est $1{,}10517 \times 0{,}0998334 \approx 0{,}110333$; le DL donne $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}000333 = 0{,}110333$. Cohérent.
— **Économie de calcul** : comme $\sin x$ a une valuation 1, il suffit de e^x à l'ordre 2 pour obtenir l'ordre 3.

Réponse. $x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – DL d'un quotient

On part de $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

— On pose $u = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui tend vers 0, et on utilise $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$.

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

— **Contrôle** en $x = 0{,}2$: $\dfrac{1}{\cos 0{,}2} = \dfrac{1}{0{,}980067} \approx 1{,}020338$; le DL donne $1 + 0{,}02 = 1{,}02$. Cohérent.

— **Cohérence de signe** : $\cos x < 1$ au voisinage de 0, donc son inverse est > 1 — le terme $+\dfrac{x^2}{2}$ est bien positif.

Réponse. $1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Correction de l'exercice 6 – DL par composition

On compose le DL de $\ln(1+u)$ avec $u = \cos x - 1$.

— $u = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$, de valuation 2. Pour l'ordre 4, il suffit donc de $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.

— $u^2 = \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ (les autres termes sont de degré ≥ 6).

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \times \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

— Coefficient de x^4 : $\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1-3}{24} = -\dfrac{1}{12}$.

— **Résultat** : $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$.

— **Contrôle** en $x = 0{,}3$: exact $\ln(0{,}955336) = -0{,}045692$; DL : $-0{,}045 - 0{,}000675 = -0{,}045675$. Cohérent.

Réponse. $-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$.

Correction de l'exercice 7 – Forme indéterminée exponentielle

On passe par l'**exponentielle du logarithme** : la quantité vaut $\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

— DL : $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$.

— Donc $\ln\dfrac{\sin x}{x} = -\dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$ (car $\ln(1+u) \sim u$).

— D'où $\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x} \to -\dfrac{1}{6}$.

— Par continuité de exp : la limite est $\mathrm{e}^{-1/6} \approx 0{,}8465$.

— **Contrôle** en $x = 0{,}1$: $\dfrac{\sin x}{x} = 0{,}9983342$ et $0{,}9983342^{100} \approx 0{,}8462$. Cohérent.

Réponse. $\mathrm{e}^{-1/6} \approx 0{,}847$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Tangente et position de la courbe

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

— **Lecture du DL** : les termes de degré ≤ 1 donnent la **tangente** : $y = 1 + x$.

— Le terme suivant donne la position : $f(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, du signe de $\frac{x^2}{2} > 0$.

— La courbe est donc **au-dessus** de sa tangente au voisinage de 0 — cohérent avec la convexité de exp.

— **Méthode générale** : le premier terme non nul après la partie affine décide de la position. Si son degré est **pair**, la courbe reste du même côté ; s'il est **impair**, elle traverse la tangente (point d'inflexion).

Réponse. Tangente $y = 1 + x$; courbe au-dessus (terme $\frac{x^2}{2} > 0$).

Correction de l'exercice 9 – Développement asymptotique en l'infini

Division euclidienne : $x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1) + 2$, donc

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$$

— Comme $\frac{2}{x-1} \to 0$ en $\pm\infty$, la droite $y = x + 1$ est **asymptote oblique** aux deux extrémités.

— **Position** : $f(x) - (x + 1) = \frac{2}{x-1}$, positif pour $x > 1$ et négatif pour $x < 1$.

— La courbe est donc **au-dessus** de l'asymptote sur $]1 ; +\infty[$ et **en dessous** sur $]-\infty ; 1[$.

— **Contrôle** : $f(3) = \frac{10}{2} = 5$ et l'asymptote donne 4 : écart $+1 = \frac{2}{2}$. Cohérent.

Réponse. Asymptote $y = x + 1$; au-dessus si $x > 1$, en dessous si $x < 1$.

Correction de l'exercice 10 – Équivalent d'une suite

On pose $h = \frac{1}{n} \to 0$.

— **DL** : $\mathrm{e}^h - 1 = h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.

— Donc $u_n = \frac{1}{h}\left(h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) = 1 + \frac{h}{2} + o(h)$.

— En revenant à n : $u_n = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_n \to 1$.

— **Contrôle** pour $n = 100$: $100(\mathrm{e}^{0,01} - 1) = 100 \times 0{,}0100502 = 1{,}00502$, à comparer à $1 + 0{,}005 = 1{,}005$. Cohérent.

— **Intérêt du développement** : il donne la **vitesse** de convergence ($\sim \frac{1}{2n}$), information qu'une simple limite ne fournit pas.

Réponse. $u_n = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$.

Correction de l'exercice 11 – Taylor-Young

On applique **Taylor-Young** en $a = 4$: $f(4 + h) = f(4) + f'(4)h + \frac{f''(4)}{2}h^2 + o(h^2)$.

— $f(4) = 2$.

— $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(4) = \frac{1}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $f'(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$, donc $f'(4) = -\dfrac{1}{4\times 8} = -\dfrac{1}{32}$.

$$\sqrt{4+h} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + o(h^2)$$

— **Contrôle** avec $h = 1$ (hors du domaine de validité asymptotique, mais instructif) : $2 + 0{,}25 - 0{,}0156 = 2{,}2344$ contre $\sqrt{5} = 2{,}2360$. Écart $1{,}6 \times 10^{-3}$: très correct.

— **Alternative** : factoriser, $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$, puis utiliser $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ — même résultat.

Réponse. $\sqrt{4+h} = 2 + \dfrac{h}{4} - \dfrac{h^2}{64} + o(h^2)$.

Correction de l’exercice 12 – Primitiver un développement limité

a) On remplace u par $-t^2$ dans $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + o(t^4)$$

b) arctan est la primitive de $\frac{1}{1+t^2}$ nulle en 0. On **primitive terme à terme** (théorème de primitivation des DL) :

— $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$; la constante vaut $\arctan 0 = 0$.

c) $\dfrac{\arctan x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{x^2}{5} + o(x^2) \to -\dfrac{1}{3}$.

— **Attention** : on primitive un DL, jamais on ne le **dérive** sans justification (il faudrait savoir que la dérivée admet un DL).

Réponse. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$; limite $-\frac{1}{3}$.

Correction de l’exercice 13 – Équivalent d’une différence

Les équivalents ne s’additionnent pas : $\operatorname{sh} x \sim x$ et $\sin x \sim x$ donneraient « 0 », qui n’est l’équivalent de rien. On pousse les DL jusqu’au premier terme non nul :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

a) $\operatorname{sh} x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$.

b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\cos x - \operatorname{ch} x = -x^2 + o(x^2) \sim -x^2$ (négatif au voisinage de 0).

c) $\left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$.

Réponse. a) $\frac{x^3}{3}$ · b) $-x^2$ · c) x^2.

Correction de l’exercice 14 – Développement en un point non nul

a) $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$ et l’on utilise $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ avec $u = \frac{h}{4}$:

$$\sqrt{4+h} = 2\left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{128}\right) + o(h^2) = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + o(h^2)$$

b) $h = 0{,}1$: $2 + 0{,}025 - 0{,}00015625 = 2{,}02484375$, à 2×10^{-6} près de la valeur exacte. L’ordre 1 seul (2,025) donne une erreur de $1{,}5 \times 10^{-4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\ln(\mathrm{e}+h) = 1 + \ln\left(1+\frac{h}{\mathrm{e}}\right) = 1 + \frac{h}{\mathrm{e}} - \frac{h^2}{2\mathrm{e}^2} + o(h^2)$.

Réponse. $\sqrt{4+h} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + o(h^2)$; $\sqrt{4{,}1} \approx 2{,}024844$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : limite délicate

Première limite. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc le numérateur vaut $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

— Le quotient tend donc vers $\frac{1}{2}$.

Deuxième limite. On développe à l'ordre 3 (le dénominateur est en x^3).

— $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

— Différence : $\tan x - \sin x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.

— La limite est donc $\frac{1}{2}$.

— **Contrôle** en $x = 0{,}05$: $\tan x - \sin x = 6{,}2539 \times 10^{-5}$ et $\frac{x^3}{2} = 6{,}25 \times 10^{-5}$; en $x = 0{,}01$ le quotient vaut 0,50001. Cohérent.

— **Leçon** : l'ordre du DL doit être **égal au degré du dénominateur**, sinon on obtient $o(1)$ et aucune conclusion.

Réponse. Les deux limites valent $\frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).