Plaquette 4 – Relations de comparaison : négligeabilité, domination, équivalents

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions au voisinage de a (g ne s'annulant pas au voisinage de a, sauf peut-être en a) :

$$f = o(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \to 0, \qquad f = O(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ bornée}, \qquad f \sim g \Leftrightarrow \frac{f}{g} \to 1$$

- $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$.
- **Croissances comparées** en $+\infty$: $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$, $x^\beta = o(\mathrm{e}^{\gamma x})$ pour $\alpha, \beta, \gamma > 0$; en 0^+ : $|\ln x|^\alpha = o(x^{-\beta})$.
- **Opérations** : $o(f) + o(f) = o(f)$; $o(f) \cdot O(g) = o(fg)$; $f \sim g$ et $u \sim v \Rightarrow fu \sim gv$, $\frac{f}{u} \sim \frac{g}{v}$, $f^\alpha \sim g^\alpha$.
- **Exponentielle** : $\mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g \Leftrightarrow f - g \to 0$.
- **Logarithme** : si $f \sim g$ et $g \to \ell \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$, alors $\ln f \sim \ln g$.

Correction de l'exercice 1 – Classer des fonctions en l'infini

Classement :

$$(\ln x)^{10} \ll \sqrt{x} \ll \frac{x}{\ln x} \ll x \ln x \ll x^{10} \ll \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \ll 2^x \ll x^x$$

- $(\ln x)^{10} = o(\sqrt{x})$: croissances comparées ($\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{2}$).
- $x^{10} = o(\mathrm{e}^{\sqrt{x}})$: avec $t = \sqrt{x}$, $\frac{x^{10}}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}} = \frac{t^{20}}{\mathrm{e}^t} \to 0$.
- $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = o(2^x)$: $\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2^x} = \exp(\sqrt{x} - x\ln 2) \to 0$ car $\sqrt{x} - x\ln 2 \to -\infty$.
- $2^x = o(x^x)$: $\left(\frac{2}{x}\right)^x \to 0$.
- Les autres : $\frac{\sqrt{x}}{x/\ln x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 0$; $\frac{x/\ln x}{x \ln x} = \frac{1}{\ln^2 x} \to 0$; $\frac{x \ln x}{x^{10}} \to 0$.

Réponse. $(\ln x)^{10} \ll \sqrt{x} \ll \frac{x}{\ln x} \ll x \ln x \ll x^{10} \ll \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \ll 2^x \ll x^x$.

Correction de l'exercice 2 – Règles de calcul avec o et O

On traduit tout en quotients.

a) Si $u = \varepsilon_1 f$ et $v = \varepsilon_2 f$ avec $\varepsilon_i \to 0$, alors $u + v = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) f$ et $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \to 0$. Si $u = \varepsilon f$ et $v = \beta g$ avec β bornée, $uv = (\varepsilon\beta) fg$ et $\varepsilon\beta \to 0$.

b) Au voisinage de a :

$$\frac{f - g}{g} = \frac{f}{g} - 1 \to 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} \to 1$$

c) Vrai : $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} \to 0 \cdot 0$. Faux : $x^2 + x \sim x^2$ en $+\infty$ mais la différence $x \to +\infty$. Un équivalent contrôle l'écart **relatif**, pas l'écart absolu.

Réponse. a) et b) par quotients ; c) vrai, puis faux ($x^2 + x \sim x^2$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Équivalents et exponentielle

a) $\frac{x+1}{x} \to 1$, mais $\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e} \neq 1$.

b) Le quotient s'écrit comme une exponentielle, continue et injective :

$$\frac{\mathrm{e}^{f}}{\mathrm{e}^{g}} = \mathrm{e}^{f-g} \to 1 \Leftrightarrow f - g \to 0$$

c) $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $\sqrt{x^2+x} - \left(x+\frac{1}{2}\right) \to 0$ et

— $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}} \sim \mathrm{e}^{x+1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{x}$. S'arrêter à $\sqrt{x^2+x} \sim x$ aurait donné le faux équivalent e^{x}.

Réponse. $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}} \sim \sqrt{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{x}$.

Correction de l'exercice 4 – Équivalents et logarithme

a) $\frac{\ln f}{\ln g} = 1 + \frac{\ln(f/g)}{\ln g}$, avec $\ln \frac{f}{g} \to \ln 1 = 0$ et $|\ln g| \to |\ln \ell| > 0$ (ou $+\infty$). Le quotient tend vers 1.

b) $f \sim g$ (les deux tendent vers 1), mais $\ln(1+x) \sim x$ et $\ln(1+2x) \sim 2x$: pas équivalents. Le logarithme « dilate » les écarts relatifs près de 1.

c) $x^2 + \sin x \sim x^2 \to +\infty$: $\ln(x^2+\sin x) \sim \ln x^2 = 2\ln x$. $\operatorname{sh} x \sim \frac{\mathrm{e}^{x}}{2} \to +\infty$:

$$\ln(\operatorname{sh} x) \sim \ln \frac{\mathrm{e}^{x}}{2} = x - \ln 2 \sim x$$

Réponse. $\ln(x^2+\sin x) \sim 2\ln x$; $\ln(\operatorname{sh} x) \sim x$.

Correction de l'exercice 5 – Somme d'équivalents

a) $f_i = g_i(1+\varepsilon_i)$ avec $\varepsilon_i \to 0$, donc

$$\left|\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} - 1\right| = \frac{|g_1\varepsilon_1 + g_2\varepsilon_2|}{g_1+g_2} \leq \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|) \to 0$$

— (la positivité de g_1 et g_2 sert à majorer $|g_1\varepsilon_1 + g_2\varepsilon_2|$ par $\max|\varepsilon_i|\,(g_1+g_2)$).

b) En $+\infty$: $x+1 \sim x$ et $-x \sim -x$, mais $(x+1) - x = 1 \not\to 0$.

c) $\sin x \sim x$ et $\sqrt{x}$ domine : $\sin x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ (car $x = o(\sqrt{x})$). $\tan x \sim x$ et $\ln(1+x^2) \sim x^2 = o(x)$: somme $\sim x$.

Réponse. Sommes de termes positifs : OK ; c) $\sqrt{x}$ et x.

Correction de l'exercice 6 – Différences de racines

On factorise par le terme dominant pour faire apparaître $(1+u)^{\alpha} - 1 \sim \alpha u$:

$$(x+1)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha} - 1\right) \sim x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

a) $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (Ou quantité conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.)

b) $\alpha = \frac{1}{3}$: $\sim \frac{1}{3x^{2/3}}$. Pour $x = 1000$: 0,0033322 contre $\frac{1}{300} \approx 0{,}0033333$ ✓.

c) DL : $\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) - \left(1-\frac{2}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Pour $x = 1000$: $1{,}4999994 \times 10^{-6}$ contre $1{,}5 \times 10^{-6}$ ✓.

Réponse. a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ · b) $\frac{1}{3x^{2/3}}$ · c) $\frac{3}{2x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Équivalents de suites

a) $\sin h = h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$ avec $h = \frac{1}{n}$:

$$n \sin \frac{1}{n} - 1 = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{6n^2}$$

— (pour $n = 100$: $-1{,}66658 \times 10^{-5}$ contre $-1{,}66667 \times 10^{-5}$).

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

c) Termes dominants : $\frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2}$, donc $w_n \sim \frac{n}{2}$.

d) $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$: $t_n = \frac{2(2n-1)}{n-1} \to 4$, donc $t_n \sim 4$.

Réponse. a) $-\frac{1}{6n^2}$ · b) $\frac{1}{n}$ · c) $\frac{n}{2}$ · d) 4.

Correction de l’exercice 8 – Complexité d’algorithmes

a) On garde le terme dominant :

$$T_1 \sim 3n^2, \qquad T_2 = 20n \log_2 n, \qquad T_3 \sim n^{3/2}$$

— $n \log_2 n = o(n^{3/2})$ (car $\log_2 n = o(\sqrt{n})$) et $n^{3/2} = o(n^2)$: pour n grand, $T_2 \ll T_3 \ll T_1$.

b) $n = 10^6$: $T_1 \approx 3 \times 10^{12}$ soit 3000 s (50 min) ; $T_2 \approx 20 \times 10^6 \times 19{,}93 \approx 4 \times 10^8$, soit 0,4 s ; $T_3 \approx 10^9$, soit 1 s.

c) $3n^2 > 20n \log_2 n \Leftrightarrow 3n > 20 \log_2 n$. Tableau : $n = 16$: $48 < 80$; $n = 32$: $96 < 100$; $n = 33$: $99 < 100{,}9$; $n = 34$: $102 > 101{,}7$. L’algorithme 2 est plus rapide dès $n = 34$. Les constantes comptent pour les petites tailles, l’ordre de grandeur pour les grandes.

Réponse. $T_2 \ll T_3 \ll T_1$; 50 min, 0,4 s, 1 s ; $T_2 < T_1$ dès $n \approx 34$.

Correction de l’exercice 9 – Puissances et exposants variables

On écrit toujours $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$ et, si l’exposant tend vers 0, $\mathrm{e}^u - 1 \sim u$:

$$\mathrm{e}^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$$

a) $\frac{\ln x}{x} \to 0$: $x^{1/x} - 1 \sim \frac{\ln x}{x}$.

b) $\sin x \ln x \sim x \ln x \to 0$: $x^{\sin x} - 1 \sim x \ln x$ (négatif). Pour $x = 0{,}01$: $-0{,}0450$ contre $-0{,}0461$.

c) $x \ln(1+x) \sim x^2$: $(1+x)^x - 1 \sim x^2$.

d) $\ln \frac{x^2 + x}{x^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$.

Réponse. a) $\frac{\ln x}{x}$ · b) $x \ln x$ · c) x^2 · d) $\frac{1}{x}$.

Correction de l’exercice 10 – Grand O sans petit o

a) $|\sin x| \le 1$: borné, donc $O(1)$. Mais $\sin x$ ne tend pas vers 0 ($\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$).

b) $\left|\frac{x \sin(1/x)}{x}\right| \le 1$: borné. Et $\frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \to 0$ (borné fois tend vers 0).

c) $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \to 0$: $f'(0) = 0$. Pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— qui n'a pas de limite en 0 (le cosinus oscille). En revanche $f(x) = 0 + 0 \cdot x + o(x)$: DL d'ordre 1. Pour l'ordre 2, il faudrait que $\frac{f(x)}{x^2} = \sin\frac{1}{x}$ ait une limite : non. Pas de DL d'ordre 2, bien que f soit dérivable.

Réponse. sin = $O(1)$ non $o(1)$; $x^2 \sin\frac{1}{x}$: dérivable en 0, f' discontinue, pas de DL d'ordre 2.

Correction de l'exercice 11 – Équivalent d'une intégrale

a) $u' = 2te^{t^2}$ ($u = e^{t^2}$), $v = \frac{1}{2t}$ ($v' = -\frac{1}{2t^2}$) :

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,dt$$

b) $G(x) = \int_0^1 e^{t^2} + \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + o\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)$, et les constantes sont négligeables : $G(x) \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$.

c) Le rapport tend vers 1 lentement : l'écart relatif est d'environ $\frac{1}{2x^2}$ (0,02 pour $x = 5$, 0,005 pour $x = 10$), ce que donnerait une seconde intégration par parties.

Réponse. $\int_0^x e^{t^2}dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Correction de l'exercice 12 – Équivalents et limites

On remplace chaque **facteur** par un équivalent (licite dans un produit ou un quotient) :

$$\ln(1+u) \sim u, \quad \sin u \sim u, \quad \tan u \sim u, \quad e^u - 1 \sim u, \quad 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$$

a) $\frac{3x \cdot 2x}{x \cdot x} = 6$.

b) $\frac{x^2}{x^2/2} = 2$.

c) $\ln(1+x^3) \sim 3\ln x$ et $\ln(1+x^2) \sim 2\ln x$ (équivalents et logarithme, limites infinies) : limite $\frac{3}{2}$.

d) $x^x = e^{x\ln x}$ et $x\ln x \to 0$: limite 1.

Réponse. a) 6 · b) 2 · c) $\frac{3}{2}$ · d) 1.

Correction de l'exercice 13 – Somme et comparaison à une intégrale

a) $(t\ln t)' = \ln t + 1 > 0$ sur $[1, +\infty[$; l'encadrement découle de la croissance sur des intervalles de longueur 1.

b) Par parties, une primitive est $\frac{t^2\ln t}{2} - \frac{t^2}{4}$. En sommant :

$$\frac{n^2\ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \le S_n \le \frac{(n+1)^2\ln(n+1)}{2} - \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{1}{4}$$

— Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{n^2\ln n}{2}$ ($\frac{n^2}{4} = o(n^2\ln n)$ et $\ln(n+1) \sim \ln n$) : $S_n \sim \frac{n^2\ln n}{2}$.

c) Même méthode avec $\int\sqrt{t} = \frac{2}{3}t^{3/2}$: $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

Réponse. $\sum k\ln k \sim \frac{n^2\ln n}{2}$; $\sum\sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Négligeabilité et limites de quotients

Dans une somme, on garde le terme **prépondérant** (celui devant lequel les autres sont négligeables) :

$$a + b \sim a \quad \text{si } b = o(a)$$

a) En $+\infty$: $\ln x = o(x^2)$ et $\sqrt{x} = o(x)$, donc $f(x) \sim \frac{x^2}{x} = x$. En 0^+ : $x^2 = o(\ln x)$ (car $\ln x \to -\infty$) et $x = o(\sqrt{x})$, donc $f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \to -\infty$.

b) En $+\infty$: $x^5 = o(\mathrm{e}^{2x})$, $1 = o(\mathrm{e}^x)$: $g(x) \sim \mathrm{e}^x$. En $-\infty$: $\mathrm{e}^{2x} = o(x^5)$ et $\mathrm{e}^x = o(1)$: $g(x) \sim x^5$.

c) $\frac{f(x)}{x} \to 1$; $g(x) \sim x^5 \to -\infty$.

Réponse. $f \sim x$ en $+\infty$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en 0^+ ; $g \sim \mathrm{e}^x$ en $+\infty$, x^5 en $-\infty$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une suite qui croît comme ln n

a) $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} > 0$. Si $u_n \to \ell$ fini, alors $\ell = \ell + \mathrm{e}^{-\ell}$, impossible. Croissante sans limite finie : $u_n \to +\infty$.

b) Avec $\varepsilon_n = \mathrm{e}^{-u_n} \to 0$ et $\mathrm{e}^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$:

$$\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n} = \mathrm{e}^{u_n}(\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1) = \frac{1}{\varepsilon_n}(\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2)) = 1 + O(\varepsilon_n) \to 1$$

c) Césaro : $\frac{\mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{u_0}}{n} \to 1$, donc $\mathrm{e}^{u_n} \sim n$. Et $u_n - \ln n = \ln \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{n} \to \ln 1 = 0$ (continuité du logarithme).

d) Écarts 0,0047 puis 8×10^{-6} : l'écart tend bien vers 0, avec un ordre de grandeur $\frac{\ln n}{n}$ (terme suivant du développement, qu'un calcul plus fin préciserait).

Réponse. $\mathrm{e}^{u_n} \sim n$ et $u_n = \ln n + o(1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).