Plaquette 3 – Applications : limites, tangentes, extremums, asymptotes

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Limite d'une forme indéterminée : ramener en 0, développer numérateur et dénominateur **jusqu'au premier terme non nul**. **Tangente et position** en a : un DL $f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_p h^p + o(h^p)$ ($c_p \neq 0$, $p \geq 2$) donne la tangente $y = c_0 + c_1 h$ et la position par le signe de $c_p h^p$ (inflexion si p est impair). **Extremum** en un point critique : même principe avec $c_1 = 0$. **Asymptote** en $\pm\infty$: poser $u = \frac{1}{x}$, écrire $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$; la droite $y = ax + b$ est asymptote et le signe de $\frac{c}{x^k}$ donne la position.

Exercice 1 – Différence de deux infinis

Calculer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

Pourquoi l'équivalent $\sin x \sim x$ ne suffit-il pas ?

Exercice 2 – Formes 1 puissance infini

Calculer :

a) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$;

b) $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \mathrm{e}^{-n}$;

c) $\lim_{x \to \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$ (poser $x = \frac{\pi}{4} + h$).

Exercice 3 – Limite en l'infini par changement de variable

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$, puis $\lim_{x \to +\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e} \right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

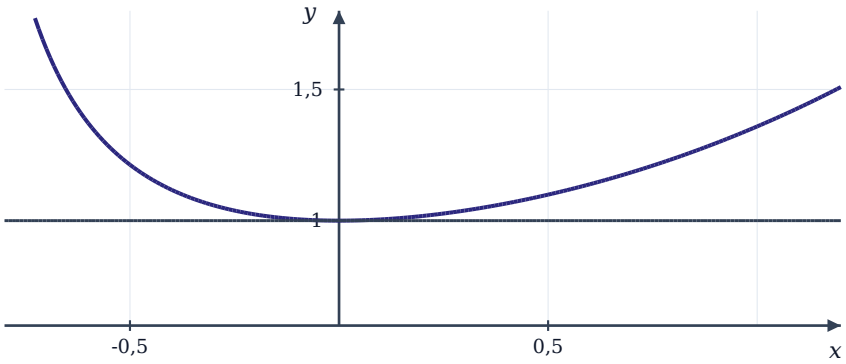
Exercice 4 – Tangente et position

Pour chaque fonction, donner la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à celle-ci au voisinage de 0 :

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$;

b) $g(x) = \ln(1+\sin x)$;

c) $h(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}$.



a) La courbe de $e^x/(1+x)$ et sa tangente horizontale en 0

Exercice 5 – Nature d'un point critique

Les fonctions suivantes ont toutes une dérivée nulle en 0. Dire si 0 est un extremum local, et de quelle nature.

a) $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2}$;

b) $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$;

c) $h(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

Pourquoi l'étude de $f''(0)$ ne suffit-elle pas ici ?

Exercice 6 – Asymptote d'une racine carrée

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

a) En $+\infty$, écrire $f(x) = x\sqrt{1+u+u^2}$ avec $u = \frac{1}{x}$ et développer à l'ordre 2 en u.

b) En déduire l'asymptote en $+\infty$ et la position de la courbe.

c) Même étude en $-\infty$ (attention : $\sqrt{x^2} = |x|$).

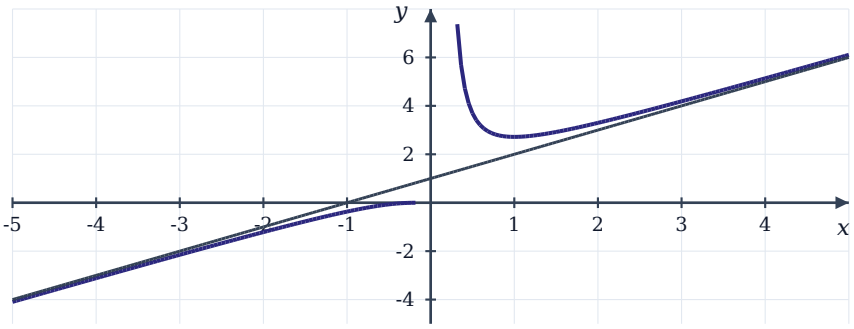
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Asymptote avec une exponentielle

Soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x}$ pour $x \neq 0$.

a) Déterminer l'asymptote en $\pm\infty$ et la position de la courbe.

b) Étudier les limites en 0^+ et 0^-.



La courbe de x·e^(1/x) et l'asymptote y = x + 1

Exercice 8 – Asymptote avec l'arctangente

Soit $f(x) = x \arctan x$.

a) Rappeler que $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et en déduire un développement de $\arctan x$ en $+\infty$.

b) Déterminer l'asymptote en $+\infty$ et la position de la courbe.

c) Que se passe-t-il en $-\infty$ (parité) ?

Exercice 9 – Prolongement de classe C^1

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ pour $x \neq 0$.

a) Déterminer le DL de f à l'ordre 1 en 0 (utiliser le DL de $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ de la plaquette 2).

b) En déduire que f se prolonge par continuité en 0 et que le prolongement est dérivable en 0.

c) Préciser la tangente en 0.

Exercice 10 – Tangente à x puissance x

Soit $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Déterminer le DL de f à l'ordre 2 en 1 (poser $x = 1 + h$).

b) En déduire la tangente en 1 et la position de la courbe.

c) Montrer que f se prolonge par continuité en 0. Le prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice 11 – Limite de suites par développements

Déterminer les limites :

a) $u_n = n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $v_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)$;

c) $w_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

d) $t_n = n(\sqrt[3]{n} - 1) - \ln n$.

Exercice 12 – Comparer deux fonctions près de 0

a) Comparer, au voisinage de 0^+, les fonctions $\sin(\tan x)$ et $\tan(\sin x)$: laquelle est la plus grande ?

b) Donner un équivalent de leur différence (on admet que $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \sim \frac{x^7}{30}$; vérifier au moins que les DL coïncident jusqu'à l'ordre 5 : $x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40}$).

c) Vérifier numériquement pour $x = 0{,}1$.

Exercice 13 – Distance d'une courbe à sa tangente

Soit f de classe C^2 au voisinage de a avec $f'(a) \neq 0$.

a) Montrer que la distance verticale $\delta(h)$ entre la courbe et sa tangente au point d'abscisse $a + h$ vérifie $\delta(h) \sim \frac{|f'(a)|}{2}h^2$.

b) Application : on remplace $\sqrt{1+x}$ par $1 + \frac{x}{2}$ pour $x = 0{,}02$. Estimer l'erreur et la comparer à la valeur exacte.

c) Quelle est l'erreur relative si l'on remplace $\sin x$ par x pour un angle de $5°$?

Exercice 14 – Prolonger et étudier

Soit $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

b) Montrer que le prolongement est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

c) Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0 (on développera $\ln(1+x)$ à l'ordre 4).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : étude d’une racine cubique

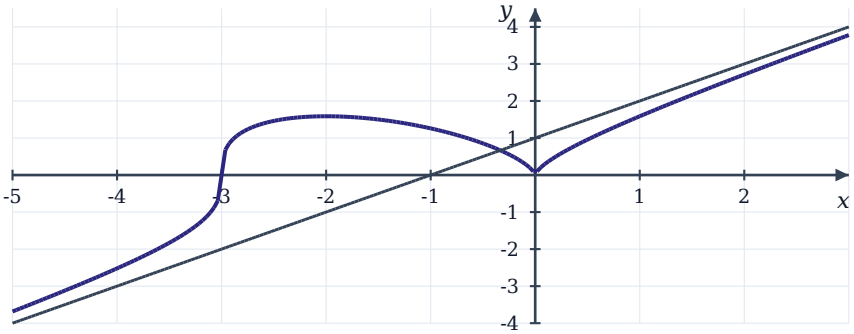
Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$ (racine cubique réelle).

a) En $\pm\infty$, écrire $f(x) = x\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{1/3}$ et déterminer l’asymptote et la position de la courbe.

b) En 0 : montrer que $f(x) \sim \sqrt[3]{3}\, x^{2/3}$. La fonction est-elle dérivable en 0 ? Quelle est l’allure de la courbe ?

c) En -3 : montrer que $f(-3 + h) \sim \sqrt[3]{9h}$. Conclure sur la tangente.

d) Résumer le comportement global de la courbe.



La courbe de $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$ et son asymptote $y = x + 1$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).