Plaquette 2 – Calculs de développements limités

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Avant tout calcul, **fixer l'ordre** de chaque morceau : dans un produit $u \cdot v$ où u commence en x^p, il suffit de développer v à l'ordre $n-p$; dans une composée $g(u(x))$ avec $u(x) \to 0$, on développe g en u puis on remplace, en ne gardant que les puissances utiles. Un **quotient** $\frac{u}{v}$ s'écrit $u \cdot \frac{1}{v}$ avec $\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \cdots$. Une **réciproque** ou une **fonction implicite** se traite par identification des coefficients. On **primitive** un DL (théorème de primitivation) ; on ne le dérive pas sans justification.

Exercice 1 – DL d'un produit

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

Quel ordre faut-il prendre pour chacun des deux facteurs ? Vérifier le coefficient de x^2 en calculant $f''(0)$.

Exercice 2 – DL de la tangente par quotient

a) Écrire $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 en 0.

b) En déduire le DL de $\tan x = \sin x \cdot \dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 5.

c) Vérifier le coefficient de x^3 à l'aide de $\tan' = 1 + \tan^2$.

Exercice 3 – Logarithme du cosinus

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\ln(\cos x)$.

En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x) + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

Exercice 4 – Exponentielle d'un sinus

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\mathrm{e}^{\sin x}$.

Pourquoi n'y a-t-il pas de terme en x^3 ?

Exercice 5 – Racine carrée d'une composée

Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1 + \sin x}$.

En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1 + \sin 0{,}1}$.

Exercice 6 – La fonction (1 + x) puissance 1/x

Soit $f(x) = (1+x)^{1/x}$ pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

a) Montrer que $f(x) \to \mathrm{e}$ en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Déterminer le DL de f à l'ordre 2 en 0.

c) En déduire $\lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Exercice 7 – DL d'une réciproque

Soit $f(x) = x + x^3$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque g de classe C^∞ (admis), impaire.

b) On écrit $g(y) = y + ay^3 + by^5 + o(y^5)$. En écrivant $f(g(y)) = y$, déterminer a et b.

c) Donner une valeur approchée de la solution réelle de $x^3 + x = 0{,}1$.

Exercice 8 – Arcsinus par primitivation

a) Écrire le DL à l'ordre 4 en 0 de $(1-t^2)^{-1/2}$.

b) En déduire le DL de $\arcsin x$ à l'ordre 5.

c) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \sin x}{x^3}$.

Exercice 9 – DL en un point quelconque

a) Donner le DL à l'ordre 2 de $\cos x$ en $\frac{\pi}{3}$ (poser $x = \frac{\pi}{3} + h$).

b) Comparer à la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 0{,}1\right) \approx 0{,}411044$.

c) Donner le DL à l'ordre 3 de e^x en 1.

Exercice 10 – Calculer ln 2 avec un DL

a) Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de $g(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

b) Pour quelle valeur de x a-t-on $\frac{1+x}{1-x} = 2$? En déduire une approximation de $\ln 2$.

c) Comparer à $\ln 2 \approx 0{,}693147$ et au calcul direct $\ln(1+1)$ par le DL de $\ln(1+x)$.

Exercice 11 – Approximation rationnelle du cosinus

On cherche a, b réels tels que $\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2} - \cos x = o(x^4)$ en 0.

a) Développer le quotient à l'ordre 4.

b) Déterminer a et b.

c) Le terme suivant est $\frac{x^6}{480}$ (admis). Comparer la qualité de cette approximation à celle du DL de cos à l'ordre 4, pour $x = 1$.

Exercice 12 – Les nombres de Bernoulli

Soit $\varphi(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ prolongée par $\varphi(0) = 1$.

a) Écrire $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$ et en déduire le DL de φ à l'ordre 4.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $\varphi(x) + \frac{x}{2}$ est une fonction paire. Quelle conséquence sur le DL ?

Exercice 13 – DL d'une fonction définie par une intégrale

Soit $F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Écrire le DL de e^{-t^2} à l'ordre 4 et en déduire celui de F à l'ordre 5.

b) En déduire un équivalent de F en 0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 14 – Choisir le bon ordre

a) Pour obtenir le DL à l'ordre 2 de $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$, à quel ordre faut-il développer $\sin x$? Faire le calcul.

b) Déterminer le DL à l'ordre 4 de $\ln \dfrac{\sin x}{x}$ (fonction prolongée par 0 en 0).

c) En déduire $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Exercice 15 – Synthèse : une fonction implicite

a) Montrer que pour tout réel x, l'équation $y + \mathrm{e}^y = 1 + x$ a une unique solution $y = \varphi(x)$, et que $\varphi(0) = 0$.

b) On admet que φ admet un DL à tout ordre en 0. Écrire $\varphi(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ et, en reportant dans $\varphi + \mathrm{e}^{\varphi} - 1 = x$, déterminer a, b, c.

c) Vérifier la valeur de a par le théorème de la bijection réciproque ($\varphi'(0) = \dfrac{1}{h'(0)}$ avec $h(y) = y + \mathrm{e}^y$).

d) Donner une valeur approchée de la solution de $y + \mathrm{e}^y = 1{,}2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).