Plaquette 5 – Développements asymptotiques et approximations en sciences

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Un **développement asymptotique** raffine un équivalent : $f = g_1 + g_2 + \dots + g_k + o(g_k)$ avec $g_{i+1} = o(g_i)$, les g_i pouvant faire intervenir ln, des puissances fractionnaires, etc. Méthode : (1) trouver le terme dominant ; (2) le **factoriser** et développer le reste avec les DL usuels (variable $u \to 0$) ; (3) pour une quantité définie **implicitement**, **réinjecter** le développement obtenu dans l'équation pour gagner un terme à chaque passage. En physique, c'est la même démarche : on développe en un **petit paramètre** ($\frac{v}{c}$, $\frac{h}{R}$, un angle, une excentricité) et l'on garde le premier terme correctif.

Exercice 1 – Développement d'une différence en l'infini

Déterminer un développement asymptotique à deux termes, en $+\infty$, de $f(x) = \sqrt{x^4 + x} - x^2$.

Vérifier pour $x = 10$.

Exercice 2 – Affiner la limite de (1 + 1/n) puissance n

a) Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

b) Comparer les approximations à un et à trois termes pour $n = 10$, sachant que $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}593742$.

c) En déduire la limite de $n^2\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2n}\right)$.

Exercice 3 – Somme harmonique entre n et 2n

On admet $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

a) En déduire un développement de $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ jusqu'au terme en $\frac{1}{n}$.

b) Vérifier pour $n = 10$ ($S_{10} \approx 0{,}668771$) et estimer le terme suivant.

c) Donner de même un développement de $H_{n^2} - 2H_n$.

Exercice 4 – Racine n-ième de n

a) Montrer que $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

b) Vérifier pour $n = 100$ ($\sqrt[100]{100} \approx 1{,}0471285$).

c) En déduire la limite de $\frac{n^2}{\ln^2 n}\left(\sqrt[n]{n} - 1 - \frac{\ln n}{n}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Cosinus et sinus de π√(n² + 1)

a) Montrer que $\pi\sqrt{n^2+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

b) En déduire un équivalent de $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ et la limite de $(-1)^n \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

c) Vérifier pour $n = 10$: $\sin\left(\pi\sqrt{101}\right) \approx 0{,}15605$.

Exercice 6 – Coefficient binomial central

a) À l'aide de la formule de Stirling, montrer que $\binom{2n}{n} \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

b) Vérifier pour $n = 10$ ($\binom{20}{10} = 184\,756$).

c) On lance $2n$ fois une pièce équilibrée. Donner un équivalent de la probabilité d'obtenir exactement n piles, et la valeur approchée pour 100 lancers.

Exercice 7 – Période du pendule aux grandes amplitudes

La période d'un pendule d'amplitude θ_0 admet le développement $T = T_0\left(1 + \dfrac{\theta_0^2}{16} + O(\theta_0^4)\right)$, où $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ est la période des petites oscillations (admis).

a) Quelle est l'erreur relative commise en utilisant T_0 pour $\theta_0 = 20°$?

b) Une horloge à balancier bat la seconde avec $\theta_0 = 5°$. On augmente l'amplitude à $6°$. Combien de secondes l'horloge perd-elle par jour ?

c) En dessous de quelle amplitude l'erreur relative reste-t-elle inférieure à 10^{-3} ?

Exercice 8 – Énergie cinétique relativiste

En relativité, l'énergie cinétique d'une particule de masse m et de vitesse v est $E_c = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ avec $\beta = \dfrac{v}{c}$.

a) Développer E_c en $\beta \to 0$ jusqu'à l'ordre 4.

b) Retrouver l'expression classique et donner la correction relative.

c) Pour $v = 0{,}1\,c$, comparer la valeur exacte à l'approximation classique.

Exercice 9 – Pesanteur en altitude

La pesanteur à l'altitude h vaut $g(h) = g_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$, avec $R = 6370$ km.

a) Développer $\dfrac{g(h)}{g_0}$ à l'ordre 2 en $\dfrac{h}{R}$.

b) Pour la Station spatiale ($h = 400$ km), comparer la valeur exacte aux approximations d'ordre 1 et 2.

c) À quelle altitude la pesanteur a-t-elle diminué de 1 % (ordre 1) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Racine perturbée

Pour ε petit, l'équation $x^2 - x - \varepsilon = 0$ a deux racines, l'une proche de 1, l'autre de 0.

a) Chercher la racine proche de 1 sous la forme $x = 1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$ en identifiant.

b) Retrouver le résultat avec la formule exacte $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2}$.

c) En déduire l'autre racine (somme des racines) et vérifier pour $\varepsilon = 0{,}1$.

Exercice 11 – Équation de Kepler aux faibles excentricités

L'anomalie excentrique E vérifie $E = M + e\sin E$ (M fixé, $0 \le e < 1$).

a) Montrer que $E = M + O(e)$, puis, en réinjectant, que $E = M + e\sin M + O(e^2)$.

b) Réinjecter encore et obtenir $E = M + e\sin M + \dfrac{e^2}{2}\sin 2M + O(e^3)$.

c) Comparer pour $M = 1$, $e = 0{,}2$ avec la valeur $E \approx 1{,}185324$ obtenue par itération.

Exercice 12 – Le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de n personnes (anniversaires équiprobables sur 365 jours), la probabilité qu'aucune ne partage son anniversaire avec une autre est $p_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \dfrac{k}{365}\right)$.

a) En utilisant $\ln(1 - x) = -x + O(x^2)$, montrer que $\ln p_n \approx -\dfrac{n(n-1)}{730}$.

b) Pour $n = 23$, comparer l'approximation $\mathrm{e}^{-n(n-1)/730}$ à la valeur exacte $p_{23} \approx 0{,}4927$.

c) Estimer le nombre de personnes à partir duquel la probabilité d'une coïncidence dépasse 50 %.

Exercice 13 – Vitesse de la méthode de Newton

Pour calculer $\sqrt{2}$, on applique la méthode de Newton à $f(x) = x^2 - 2$: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$, $x_0 = 1{,}5$.

a) En posant $e_n = x_n - \sqrt{2}$, montrer que $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2x_n}$.

b) Plus généralement, pour f de classe C^2 avec $f(\ell) = 0$, $f'(\ell) \neq 0$, justifier par Taylor-Young que $e_{n+1} \sim \dfrac{f''(\ell)}{2f'(\ell)} e_n^2$ quand $e_n \to 0$.

c) Calculer e_1, e_2, e_3 et commenter.

Exercice 14 – Développement à plusieurs échelles

Déterminer un développement asymptotique à deux termes en $+\infty$ de :

a) $f(x) = \ln(x + \ln x)$;

b) $\ln g(x)$, où $g(x) = \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$;

c) $h(n) = \ln\binom{2n}{n}$ (utiliser l'exercice sur le coefficient binomial central).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : réciproque de x e^x en l'infini

La fonction $x \mapsto xe^x$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même ; on note W sa réciproque : $W(y)e^{W(y)} = y$ (fonction de Lambert).

a) Montrer que $W(y) \to +\infty$ et $W(y) = \ln y - \ln W(y)$.

b) En déduire $W(y) \sim \ln y$.

c) En réinjectant, montrer que $W(y) = \ln y - \ln\ln y + o(1)$, puis que $W(y) = \ln y - \ln\ln y + \dfrac{\ln\ln y}{\ln y} + o\left(\dfrac{\ln\ln y}{\ln y}\right)$.

d) Vérifier pour $y = 10^6$, sachant que $W(10^6) \approx 11{,}3834$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).