Plaquette 1 – Équivalents, négligeabilité et développements limités

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On remplace chaque facteur par un **équivalent** pour lever une forme indéterminée, on utilise les **développements limités usuels** à l'ordre juste suffisant, et on lit sur le DL la tangente, la position de la courbe ou une asymptote.

Exercice 1 – Équivalents simples

Déterminer un équivalent simple en 0 de :

a) $\sin(3x)$

b) $\ln(1+x^2)$

c) $\mathrm{e}^{2x}-1$

Exercice 2 – Limite par équivalents

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\ln(1+3x)}$.

Exercice 3 – Piège de l'addition

Pourquoi ne peut-on pas écrire $\sin x - x \sim x - x = 0$? Donner le bon équivalent de $\sin x - x$ en 0.

Exercice 4 – DL d'un produit

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

Exercice 5 – DL d'un quotient

Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{\cos x}$.

Exercice 6 – DL par composition

Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $\ln(\cos x)$.

Exercice 7 – Forme indéterminée exponentielle

Calculer $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Exercice 8 – Tangente et position de la courbe

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$. À l'aide du DL en 0 à l'ordre 2, donner l'équation de la tangente en 0 et la position locale de la courbe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Développement asymptotique en l'infini

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, et la position de la courbe par rapport à elle.

Exercice 10 – Équivalent d'une suite

Déterminer la limite de $u_n = n\left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right)$ puis un développement de u_n à l'ordre $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 11 – Taylor-Young

Écrire le développement limité de $f(x) = \sqrt{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 4.

Exercice 12 – Primitiver un développement limité

a) Écrire le DL à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{1+t^2}$.

b) En déduire le DL à l'ordre 5 de $\arctan x$ en 0.

c) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$.

Exercice 13 – Équivalent d'une différence

Donner un équivalent simple en 0 de :

a) $\mathrm{sh}\, x - \sin x$;

b) $\cos x - \mathrm{ch}\, x$;

c) $\mathrm{e}^x - 1 - \ln(1+x)$.

Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser $\mathrm{sh}\, x \sim x$ et $\sin x \sim x$ pour a).

Exercice 14 – Développement en un point non nul

a) Donner le DL à l'ordre 2 de $\sqrt{x}$ en 4 (poser $x = 4 + h$).

b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{4{,}1}$ et comparer à la valeur exacte 2,024846…

c) Donner le DL à l'ordre 2 de $\ln x$ en e.

Exercice 15 – Synthèse : limite délicate

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}$ puis $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).