Plaquette 4 – Relations de comparaison : négligeabilité, domination, équivalents

Analyse asymptotique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour **comparer** deux fonctions (ou suites), on étudie la limite de leur **quotient**. Les **croissances comparées** règlent la plupart des cas en $+\infty$. Les équivalents se **multiplient**, se **divisent**, s'élèvent à une **puissance fixe** ; ils ne s'**additionnent** pas et ne passent pas à l'**exponentielle** sans précaution. Pour une **différence** d'équivalents, on revient à un DL ou à une factorisation (quantité conjuguée, mise en facteur du terme dominant). Pour une somme ou une suite récurrente, on cherche une quantité qui **varie régulièrement** et on applique Césaro.

Exercice 1 – Classer des fonctions en l'infini

Ranger les fonctions suivantes de sorte que chacune soit négligeable devant la suivante en $+\infty$:

$$x\ln x,\quad \sqrt{x},\quad \mathrm{e}^{\sqrt{x}},\quad \frac{x}{\ln x},\quad (\ln x)^{10},\quad x^{10},\quad 2^x,\quad x^x$$

Justifier trois des comparaisons non immédiates.

Exercice 2 – Règles de calcul avec o et O

Au voisinage de a :

a) Montrer que $o(f)+o(f)=o(f)$ et $o(f)\times O(g)=o(fg)$.

b) Montrer que $f\sim g$ si et seulement si $f-g=o(g)$.

c) Vrai ou faux (justifier) : « $f=o(g)$ et $g=o(h)$ entraînent $f=o(h)$ » ; « $f\sim g$ entraîne $f-g\to 0$ ».

Exercice 3 – Équivalents et exponentielle

a) Montrer que $x+1\sim x$ en $+\infty$ mais que $\mathrm{e}^{x+1}\not\sim \mathrm{e}^{x}$.

b) Montrer que $\mathrm{e}^{f}\sim \mathrm{e}^{g}$ si et seulement si $f-g\to 0$.

c) Donner un équivalent en $+\infty$ de $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}}$ (développer $\sqrt{x^2+x}$ jusqu'au terme constant).

Exercice 4 – Équivalents et logarithme

a) Soit $f\sim g$ au voisinage de a, avec $g>0$ et $g\to \ell\in[0,+\infty]$, $\ell\neq 1$. Montrer que $\ln f\sim \ln g$ (écrire $\ln f=\ln g+\ln\frac{f}{g}$).

b) Montrer que le résultat tombe en défaut si $\ell=1$: prendre $f(x)=1+x$ et $g(x)=1+2x$ en 0.

c) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln(x^2+\sin x)$ et de $\ln(\operatorname{sh} x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Somme d'équivalents

a) Montrer que si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ avec $g_1, g_2 > 0$, alors $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

b) Donner un contre-exemple quand g_1 et g_2 sont de signes contraires.

c) Application : équivalent en 0^+ de $\sin x + \sqrt{x}$ et de $\tan x + \ln(1 + x^2)$.

Exercice 6 – Différences de racines

Donner un équivalent en $+\infty$ de :

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

b) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$;

c) $\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{2}{x}$.

Vérifier numériquement pour $x = 1000$.

Exercice 7 – Équivalents de suites

Donner un équivalent simple de :

a) $u_n = n \sin\frac{1}{n} - 1$;

b) $v_n = \ln(n+1) - \ln n$;

c) $w_n = \frac{n^3 - 2n + \ln n}{2n^2 + \sqrt{n}}$;

d) $t_n = \binom{2n}{2} / \binom{n}{2}$.

Exercice 8 – Complexité d'algorithmes

Trois algorithmes de tri demandent respectivement $T_1(n) = 3n^2 + 5n$, $T_2(n) = 20n\log_2 n$ et $T_3(n) = n^{3/2} + 1000$ opérations pour n données.

a) Donner un équivalent simple de chacun et les classer pour $n \to +\infty$.

b) Pour $n = 10^6$ et une machine faisant 10^9 opérations par seconde, estimer les durées.

c) À partir de quel n (environ) l'algorithme 2 devient-il plus rapide que le 1 ?

Exercice 9 – Puissances et exposants variables

Donner un équivalent de :

a) $x^{1/x} - 1$ en $+\infty$;

b) $x^{\sin x} - 1$ en 0^+ ;

c) $(1+x)^x - 1$ en 0 ;

d) $\ln(x^2 + x) - 2\ln x$ en $+\infty$.

Exercice 10 – Grand O sans petit o

a) Montrer que $\sin x = O(1)$ en $+\infty$ mais que $\sin x \neq o(1)$.

b) Montrer que $x \sin\frac{1}{x} = O(x)$ en 0, puis que $x^2 \sin\frac{1}{x} = o(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Soit $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable en 0 mais que f' n'a pas de limite en 0. f admet-elle un DL d'ordre 2 en 0 ?

Exercice 11 – Équivalent d'une intégrale

Soit $G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Par parties, pour $x \geq 1$, écrire $\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{2t} \cdot 2t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ et montrer que $\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) On admet que $\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\right)$. En déduire $G(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

c) Vérification numérique : pour $x = 5$, le rapport $G(x) \,/\, \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ vaut environ 1,021 ; pour $x = 10$, environ 1,005. Commenter.

Exercice 12 – Équivalents et limites

Calculer, à l'aide d'équivalents (sans DL au-delà de l'ordre 1) :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)\sin 2x}{x \tan x}$;

b) $\lim_{x \to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^2}{1 - \cos x}$;

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(1+x^2)}$;

d) $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

Exercice 13 – Somme et comparaison à une intégrale

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln k$.

a) Justifier que $t \mapsto t \ln t$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et que $\int_{k-1}^{k} t \ln t\,\mathrm{d}t \leq k \ln k \leq \int_{k}^{k+1} t \ln t\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer une primitive de $t \ln t$ et en déduire $S_n \sim \frac{n^2 \ln n}{2}$.

c) Donner de même un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 14 – Négligeabilité et limites de quotients

Soit $f(x) = \frac{x^2 + \ln x}{x + \sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + x^5}{\mathrm{e}^x + 1}$.

a) Donner un équivalent simple de f en $+\infty$ et en 0^+.

b) Donner un équivalent de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : une suite qui croît comme ln n

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

a) Montrer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n} \to 1$ (écrire $\mathrm{e}^{u_{n+1}} = \mathrm{e}^{u_n}\exp(\mathrm{e}^{-u_n})$).

c) En déduire, par le théorème de Césaro, $\mathrm{e}^{u_n} \sim n$, puis $u_n = \ln n + o(1)$.

d) Vérification : $u_{1000} \approx 6{,}9125$ et $\ln 1000 \approx 6{,}9078$; $u_{10^6} \approx 13{,}815519$ et $\ln 10^6 \approx 13{,}815511$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).