Plaquette 5 – Applications linéaires en situation : interpolation, opérateurs, synthèse

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Outils de synthèse.

— $f \in L(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$ finie : f injective $\Leftrightarrow$ f bijective. Donc **unicité** $\Rightarrow$ **existence**.

— Une application linéaire est **déterminée** par les images d'une base, qu'on peut choisir librement.

— Si F est **stable** par u, la restriction $u_F \in L(F)$ a une matrice dans une base de F.

— Espace **dual** : les formes linéaires sur E ($\dim E = n$) forment un espace de dimension n ; les formes coordonnées d'une base en forment une base.

— Sur $M_n(\mathrm{K})$: toute forme linéaire s'écrit $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ pour une unique A.

— **Matrice compagnon** de $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 1 – Interpolation d'Hermite

a) Évaluations et dérivation sont linéaires. Si $\varphi(P) = 0$, 0 et 1 sont racines au moins doubles : $X^2(X-1)^2 \mid P$, polynôme de degré $4 > 3$. Donc $P = 0$.

b) $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ et φ injective : φ est bijective. Toute donnée (y_0, s_0, y_1, s_1) est réalisée par un unique polynôme de degré ≤ 3.

c) $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$ imposent $P = X + bX^2 + aX^3$. Puis

$$\begin{cases} P(1) = 1 + b + a = 1 \\ P'(1) = 1 + 2b + 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -b,\ 1 - b = 0$$

— $b = 1$, $a = -1$: $P = -X^3 + X^2 + X$. Contrôle : $P(1) = 1$, $P'(1) = -3 + 2 + 1 = 0$.

d) $\varphi^{-1}(0,0,1,0)$: $P = bX^2 + aX^3$ avec $a + b = 1$ et $3a + 2b = 0$, donc $a = -2$, $b = 3$: $3X^2 - 2X^3$.

— $\varphi^{-1}(0,0,0,1)$: $a + b = 0$ et $3a + 2b = 1$, donc $a = 1$, $b = -1$: $X^3 - X^2$. Contrôle : dérivée $3X^2 - 2X$, qui vaut 1 en 1.

Réponse. φ isomorphisme ; $P = -X^3 + X^2 + X$; $\varphi^{-1}(0,0,1,0) = 3X^2 - 2X^3$, $\varphi^{-1}(0,0,0,1) = X^3 - X^2$.

Correction de l'exercice 2 – Restes chinois pour les polynômes

a) Le reste modulo un polynôme fixé est linéaire (unicité de la division euclidienne) : ψ est linéaire. $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 = 2 + 2$.

b) Si $\psi(P) = 0$, $X^2 \mid P$ et $(X-1)^2 \mid P$; ces deux polynômes sont premiers entre eux, donc $X^2(X-1)^2 \mid P$ avec $\deg P \leq 3 < 4$: $P = 0$. Injective entre espaces de même dimension : isomorphisme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $P \equiv 0 \pmod{(X-1)^2}$: $P = (X-1)^2(aX+b)$. Il faut $P(0) = 1$ et $P'(0) = 0$ (reste 1 modulo X^2) :

$$P(0) = b = 1, \qquad P'(0) = [2(X-1)(aX+b) + a(X-1)^2]_{X=0} = -2b + a = 0$$

— $a = 2$, $b = 1$: $P = (X-1)^2(2X+1) = 2X^3 - 3X^2 + 1$. Contrôle : modulo X^2, il reste 1.

d) On cherche $P = (X-1)^2(aX+b)$ avec $P(0) = 1$ et $P'(0) = 2$: $b = 1$ et $a - 2 = 2$, donc $a = 4$: $P = (X-1)^2(4X+1) = 4X^3 - 7X^2 + 2X + 1$. Contrôle : modulo X^2, il reste $2X + 1$.

Réponse. ψ isomorphisme ; c) $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$; d) $P = 4X^3 - 7X^2 + 2X + 1$.

Correction de l'exercice 3 – Formes linéaires et formule de Simpson

a) Si $a\delta_0 + b\delta_1 + c\delta_2 = 0$, on l'applique aux polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés à $0, 1, 2$: $a = b = c = 0$. Trois formes libres dans un espace de dimension 3 : base de E^*.

b) $\iota \in E^*$ se décompose de façon unique dans cette base.

c) En appliquant à la base canonique :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \int_0^2 1 = 2 \\ \beta + 2\gamma = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t = 2 \\ \beta + 4\gamma = \int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3} \end{cases}$$

— $2\gamma = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$, donc $\gamma = \frac{1}{3}$; $\beta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; $\alpha = 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

— $\int_0^2 P = \frac{1}{3}(P(0) + 4P(1) + P(2))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$: c'est la formule de **Simpson**.

— (Autre calcul : $\alpha = \iota(L_0)$, $\beta = \iota(L_1)$, $\gamma = \iota(L_2)$.)

d) $\int_0^2 t^3\,\mathrm{d}t = 4$ et $\frac{1}{3}(0 + 4 + 8) = 4$: exacte aussi pour X^3, par symétrie autour de 1.

Réponse. $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ base de E^* ; $\int_0^2 P = \frac{1}{3}(P(0) + 4P(1) + P(2))$; exacte aussi en degré 3.

Correction de l'exercice 4 – Le décalage restreint aux suites récurrentes

a) Si $u \in R$, $v = S(u)$ vérifie $v_{n+2} = u_{n+3} = u_{n+2} + 2u_{n+1} = v_{n+1} + 2v_n$.

b) $r^2 = r + 2 \Leftrightarrow r \in \{2, -1\}$: $a, b \in R$, non colinéaires, et $\dim R = 2$: base.
$S(a) = (2^{n+1}) = 2a$ et $S(b) = -b$:

$$\mathrm{Mat}_{(a,b)}(S_R) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $S(e)$ a pour premiers termes $(e_1, e_2) = (0, 2)$ (car $e_2 = e_1 + 2e_0 = 2$), donc $S(e) = 2f$. $S(f)$ a pour premiers termes $(f_1, f_2) = (1, 1)$, donc $S(f) = e + f$:

— $\mathrm{Mat}_{(e,f)}(S_R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: c'est la **matrice compagnon** de la relation.

d) Ce sont deux matrices du même endomorphisme : elles sont semblables. Même trace ($1 = 0 + 1$) et, dans la base (a, b), les valeurs 2 et -1 apparaissent sur la diagonale : ce sont les racines de l'équation caractéristique. La matrice de passage de (e, f) à (a, b) a pour colonnes $(1, 2)$ et $(1, -1)$ (premiers termes de a et b).

Réponse. Dans (a, b) : $\mathrm{diag}(2, -1)$; dans (e, f) : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (compagnon) ; matrices semblables.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Primitiver en inversant une matrice

a) Si $(a+bx+cx^2)\mathrm{e}^x = 0$ pour tout x, le polynôme $a+bx+cx^2$ est nul. $D(f_0) = f_0$, $D(f_1) = f_0 + f_1$, $D(f_2) = 2f_1 + f_2$: V est stable.

b) Colonnes : coordonnées de $D(f_0)$, $D(f_1)$, $D(f_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— triangulaire à diagonale non nulle : inversible, D_V est bijective.

c) $A = I_3 + N$ avec $N^3 = 0$, donc $A^{-1} = I_3 - N + N^2$. N^2 n'a qu'un coefficient non nul, $(N^2)_{13} = 1 \times 2 = 2$:

— $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La troisième colonne donne $D_V^{-1}(f_2) = 2f_0 - 2f_1 + f_2$.

— Une primitive de $x^2\mathrm{e}^x$ est $(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x$. Contrôle : dérivée $(2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x$.

d) Dans V, $D_V - \mathrm{id}$ a pour matrice N, et le second membre $x\mathrm{e}^x = f_1$ a pour coordonnées $(0,1,0)$. Comme $N(y_0,y_1,y_2)^{\mathsf{T}} = (y_1, 2y_2, 0)^{\mathsf{T}}$, il faut $y_1 = 0$ et $2y_2 = 1$. Solutions dans V : $y = \left(c + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x$, $c \in \mathbb{R}$. Ce sont toutes les solutions : la solution générale de $y' - y = x\mathrm{e}^x$ est $\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^x$ (solution particulière + solutions homogènes $c\mathrm{e}^x$).

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; primitive $(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x$; $y = \left(c + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x$.

Correction de l'exercice 6 – Formes linéaires invariantes par commutation

a) C'est la règle de calcul des matrices élémentaires : le produit est nul sauf si l'indice de colonne du premier facteur égale l'indice de ligne du second.

b) Pour $i \neq j$: $E_{ij} = E_{ii}E_{ij}$ et $E_{ij}E_{ii} = \delta_{ji}E_{ii} = 0$. Donc

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii}E_{ij}) = f(E_{ij}E_{ii}) = f(0) = 0$$

c) $E_{ii} = E_{ij}E_{ji}$ et $E_{jj} = E_{ji}E_{ij}$, donc $f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj})$. Notons λ cette valeur commune.

d) Pour $M = \sum_{i,j} m_{ij}E_{ij}$, par linéarité :

— $f(M) = \sum_{i \neq j} m_{ij} \cdot 0 + \sum_i m_{ii}\lambda = \lambda \mathrm{tr} M$.

— La trace est donc, à un facteur près, la **seule** forme linéaire vérifiant $f(AB) = f(BA)$.

Réponse. $f(E_{ij}) = 0$ $(i \neq j)$, $f(E_{ii}) = \lambda$; donc $f = \lambda\mathrm{tr}$.

Correction de l'exercice 7 – Toute forme linéaire sur Mn(K) est une trace tordue

a) Linéarité du produit et de la trace, en M puis en A.

b) AE_{ij} a pour seule colonne non nulle la colonne j, égale à la colonne i de A ; son coefficient diagonal en position (j,j) est a_{ji}. Donc

$$\varphi_A(E_{ij}) = a_{ji}$$

— Si $\varphi_A = 0$, tous les a_{ji} sont nuls : $A = 0$. Φ est injective.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Φ va de $M_n(\mathrm{K})$ (dimension n^2) dans l'espace des formes linéaires sur $M_n(\mathrm{K})$ (dimension n^2) : injective, elle est bijective. Toute ℓ est un φ_A, avec $a_{ji} = \ell(E_{ij})$, c'est-à-dire $A = (\ell(E_{ji}))_{i,j}$.

d) $\ell(E_{12}) = 1$, $\ell(E_{21}) = 3$, les autres nuls. Donc $a_{21} = 1$ et $a_{12} = 3$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— Contrôle : $AM = \begin{pmatrix} 3m_{21} & 3m_{22} \\ m_{11} & m_{12} \end{pmatrix}$, de trace $3m_{21} + m_{12}$.

Réponse. $\varphi_A(E_{ij}) = a_{ji}$; Φ isomorphisme ; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 – Flou d'un signal circulaire : peut-on revenir en arrière ?

a) Ligne k : $\frac{1}{2}$ en colonnes k et $k+1$ (modulo n) :

$$B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Chaque moyenne de deux termes consécutifs de $(1, -1, 1, -1)$ vaut 0. Le noyau n'étant pas réduit à 0, B_4 n'est pas injective : deux signaux différant d'un multiple de $(1, -1, 1, -1)$ ont le même flou. On ne peut pas « déflouter » : l'oscillation la plus rapide est détruite.

c) $B_3 x = 0$: $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_1$, donc $x_1 = 0$ puis tout est nul. B_3 injective, donc bijective. Pour $B_3 x = (1, 2, 3)$:

— $x_1 + x_2 = 2$, $x_2 + x_3 = 4$, $x_3 + x_1 = 6$; somme : $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.
— $x_3 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Contrôle : $\frac{2+0}{2} = 1$, $\frac{0+4}{2} = 2$, $\frac{4+2}{2} = 3$.

d) $Bx = 0$ impose $x_{k+1} = -x_k$ pour tout k, donc $x_k = (-1)^{k-1} x_1$, et la périodicité $x_{n+1} = x_1$ donne $(-1)^n x_1 = x_1$. Si n est **impair**, $x_1 = 0$: B est inversible ; si n est **pair**, le noyau est la droite engendrée par $(1, -1, 1, -1, \ldots)$.

Réponse. $n = 4$: noyau Vect$(1, -1, 1, -1)$, non inversible ; $n = 3$: $x = (2, 0, 4)$; inversible si et seulement si n impair.

Correction de l'exercice 9 – L'opérateur de Legendre

a) $((X^2 - 1)P')' = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$, de degré $\leq \deg P$: u est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Pour $P = X^k$:

$$u(X^k) = k(k-1)X^k - k(k-1)X^{k-2} + 2kX^k = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

b) $u(X^k)$ n'a de composantes que sur X^k et X^{k-2} : la colonne k n'a de coefficients non nuls qu'en lignes k et $k-2$, au-dessus de la diagonale. Diagonale : $0, 2, 6, 12, \ldots, n(n+1)$.

c) $u(1) = 0$, $u(X) = 2X$, $u(X^2) = 6X^2 - 2$:

— $\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
— On cherche $P_2 = X^2 + a$ (le terme en X ne peut pas intervenir, $u(X) = 2X$) : $u(P_2) = 6X^2 - 2$ et $6P_2 = 6X^2 + 6a$, donc $a = -\frac{1}{3}$. $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ (polynôme de Legendre à un facteur près).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $u(P) = 0 \Leftrightarrow (X^2 - 1)P'$ est constant ; comme $X^2 - 1$ divise ce polynôme constant, il est nul, donc $P' = 0$. $\ker u = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{rg} u = n$ (théorème du rang).

Réponse. $u(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$; triangulaire, diagonale $k(k+1)$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$; $\ker u =$ constantes.

Correction de l'exercice 10 – Construire une application linéaire par des images

a) $(1,2,1) = (1,1,0) + (0,1,1)$: par linéarité, $f(1,2,1)$ est forcément $(1,0) + (0,1) = (1,1)$. La troisième condition est **conséquence** des deux premières : compatible. Mais les trois vecteurs n'engendrent qu'un plan de $\mathbb{R}^3$; l'image d'un vecteur hors de ce plan reste libre.

b) $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,0,0)$ forment une base (si $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha + \gamma, \alpha + \beta, \beta) = 0$ alors tout est nul). Une application linéaire est déterminée de façon unique par les images d'une base :

$$f(u_1) = (1,0), \quad f(u_2) = (0,1), \quad f(u_3) = (0,0)$$

— Images de la base canonique : $f(e_1) = (0,0)$; $e_2 = u_1 - e_1$, donc $f(e_2) = (1,0)$; $e_3 = u_2 - e_2$, donc $f(e_3) = (0,1) - (1,0) = (-1,1)$.

— $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Contrôle : $f(1,2,1) = (2-1,1) = (1,1)$.

c) Avec $f(1,2,1) = (1,2) \neq (1,0) + (0,1)$, les conditions sont **incompatibles** avec la linéarité : aucune application ne convient.

Réponse. a) compatibles, f non déterminée ; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) impossible.

Correction de l'exercice 11 – Les complexes comme matrices réelles

a) $m_z(1) = a + ib$ et $m_z(i) = ai - b = -b + ai$:

$$M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

b) $m_{zz'} = m_z \circ m_{z'}$ (associativité du produit), et la matrice d'une composée est le produit des matrices. De même $m_{z+z'} = m_z + m_{z'}$.

c) $M(\mathrm{e}^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: multiplier par $\mathrm{e}^{i\theta}$, c'est tourner d'angle θ. $M(i)$ est le quart de tour, et $M(i)^2 = M(i^2) = M(-1) = -I_2$.

d) $\{M(z)\} = \{aI_2 + bM(i)\} = \mathrm{Vect}(I_2, M(i))$, famille libre : dimension 2. $M(z)$ est inversible si et seulement si $a^2 + b^2 \neq 0$ (déterminant), c'est-à-dire $z \neq 0$, et $M(z)M(z^{-1}) = M(1) = I_2$. On a ainsi réalisé le corps $\mathbb{C}$ comme un ensemble de matrices réelles.

Réponse. $M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; morphisme ; $M(\mathrm{e}^{i\theta})$ rotation, $M(i)^2 = -I_2$; $M(z)^{-1} = M(z^{-1})$.

Correction de l'exercice 12 – Le bit de parité

a) π est linéaire (somme des coordonnées), et $\pi(e_1) = 1$: non nulle. Son noyau est un hyperplan :

$$\dim P = n - 1, \qquad \mathrm{card} P = 2^{n-1}$$

b) Dans F_2, $x_1 + \ldots + x_n = 0$ signifie que le nombre de coordonnées égales à 1 est **pair** : P est l'ensemble des mots de poids pair.

c) $c(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1 + \ldots + x_{n-1})$: chaque coordonnée est linéaire. c est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

injective (on relit les $n-1$ premiers bits), et $\pi(c(x)) = 2(x_1 + \ldots + x_{n-1}) = 0$: $\mathrm{Im} c \subset P$. Par dimensions ($n-1$ des deux côtés), $\mathrm{Im} c = P$.

d) Recevoir $y = c(x) + e_k$ donne $\pi(y) = 0 + 1 = 1 \neq 0$: l'erreur est détectée. Avec deux erreurs, $\pi(c(x) + e_k + e_l) = 1 + 1 = 0$: le mot reçu est encore dans P, l'erreur passe inaperçue. (Le code de Hamming, avec trois bits de contrôle, fait mieux : il corrige une erreur.)

Réponse. $\dim P = n-1$, 2^{n-1} mots (poids pair) ; c isomorphisme sur P ; une erreur détectée, deux non.

Correction de l'exercice 13 – Commutant d'une matrice diagonale

a) $(MD)_{ij} = m_{ij}\lambda_j$ et $(DM)_{ij} = \lambda_i m_{ij}$, donc

$$(MD - DM)_{ij} = (\lambda_j - \lambda_i) m_{ij}$$

— Pour $i \neq j$, $\lambda_j \neq \lambda_i$, donc $m_{ij} = 0$: M est diagonale. Réciproquement, les matrices diagonales commutent entre elles. $\dim C(D) = n$.

b) Les puissances de D sont diagonales (et commutent avec D).

c) Si $\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = 0$, alors le polynôme $Q = \sum a_k X^k$ vérifie $Q(\lambda_i) = 0$ pour tout i (coefficients diagonaux). Q est de degré $\leq n-1$ avec n racines distinctes : $Q = 0$, tous les a_k sont nuls.

d) $(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$ est une famille libre de n éléments de $C(D)$, de dimension n : c'en est une base. Toute $M \in C(D)$ est donc un polynôme en D : $M = Q(D)$ avec $Q(\lambda_i) = m_{ii}$ (interpolation de Lagrange).

— Exemple : on cherche Q de degré ≤ 2 avec $Q(0) = 1$, $Q(1) = 0$, $Q(2) = 0$: $Q = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$. Donc $\mathrm{diag}(1,0,0) = \frac{1}{2}(D - I_3)(D - 2I_3) = \frac{1}{2}D^2 - \frac{3}{2}D + I_3$. Contrôle sur le coefficient $(3,3)$: $\frac{1}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 2 + 1 = 0$.

Réponse. $C(D)$ = diagonales, dimension n, base $(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$; $\mathrm{diag}(1,0,0) = \frac{1}{2}D^2 - \frac{3}{2}D + I_3$.

Correction de l'exercice 14 – Formule de Newton par les différences finies

a) $H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!}((X+1) - (X-k+1)) = H_{k-1}$. Dans la base (H_k), la matrice de Δ a des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs (même forme que la dérivation dans la base $\frac{X^k}{k!}$).

b) $\Delta^j(H_k) = H_{k-j}$ (et 0 si $j > k$). Or $H_m(0) = 0$ pour $m \geq 1$ et $H_0(0) = 1$. Donc

$$(\Delta^j P)(0) = \sum_k c_k H_{k-j}(0) = c_j$$

c) Valeurs $0, 1, 8, 27$; différences premières $1, 7, 19$; secondes $6, 12$; troisièmes 6. Les premiers termes de chaque ligne donnent $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 6$, $c_3 = 6$:

— $X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3$.

d) $\sum_{m=0}^{N-1} H_k(m) = H_{k+1}(N)$ (car $\Delta H_{k+1} = H_k$, somme télescopique). Donc

— $\sum_{m=0}^{N-1} m^3 = H_2(N) + 6H_3(N) + 6H_4(N) = \binom{N}{2} + 6\binom{N}{3} + 6\binom{N}{4} = \left(\frac{N(N-1)}{2}\right)^2$. Contrôle $N = 3$: $3 + 6 + 0 = 9 = 0 + 1 + 8$.

Réponse. $\Delta H_k = H_{k-1}$; $c_k = \Delta^k P(0)$; $X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3$; $\sum_{m<N} m^3 = \left(\frac{N(N-1)}{2}\right)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une récurrence d’ordre 3 et sa matrice compagnon

a) u_{n+1} et u_{n+2} sont recopiés, u_{n+3} est donné par la relation :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) (r^n) convient si et seulement si $r^3 = 2r^2 + r - 2$, soit $r^3 - 2r^2 - r + 2 = (r-2)(r^2-1) = 0$: $r \in \{1, -1, 2\}$.

— $C(1, r, r^2)^{\mathsf{T}} = (r, r^2, -2 + r + 2r^2)^{\mathsf{T}}$, et $-2 + r + 2r^2 = r^3$ par l’équation : c’est $r(1, r, r^2)^{\mathsf{T}}$.

c) Les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_{-1} = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,2,4)$ forment une base (matrice de Vandermonde de trois nombres distincts). Dans cette base, la matrice de C est $\mathrm{diag}(1,-1,2)$. On décompose $U_0 = (3,2,6) = \alpha v_1 + \beta v_{-1} + \gamma v_2$:

— $\alpha + \beta + \gamma = 3$, $\alpha - \beta + 2\gamma = 2$, $\alpha + \beta + 4\gamma = 6$; la première et la troisième donnent $3\gamma = 3$, $\gamma = 1$, puis $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha - \beta = 0$: $\alpha = \beta = 1$.

— $U_n = C^n U_0 = v_1 + (-1)^n v_{-1} + 2^n v_2$, dont la première coordonnée donne

$$u_n = 1 + (-1)^n + 2^n$$

d) $u_3 = 2 \times 6 + 2 - 2 \times 3 = 8$ et $1 - 1 + 8 = 8$; $u_4 = 2 \times 8 + 6 - 2 \times 2 = 18$ et $1 + 1 + 16 = 18$.

Réponse. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; racines $1, -1, 2$; $u_n = 1 + (-1)^n + 2^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).