Plaquette 4 – Matrices d'applications linéaires et changements de base

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Matrices et bases.

— $\mathrm{Mat}_{B,C}(f)$: colonne j = coordonnées de $f(e_j)$ dans C. Si X = coordonnées de x, alors AX = coordonnées de $f(x)$.

— $\mathrm{Mat}(g\circ f)=\mathrm{Mat}(g)\mathrm{Mat}(f)$; f bijective $\Leftrightarrow$ sa matrice est inversible, et $\mathrm{Mat}(f^{-1})=\mathrm{Mat}(f)^{-1}$.

— **Matrice de passage** $P=P_{B\to B'}$: colonnes = coordonnées des vecteurs de B' dans B. Pour un vecteur : $X=PX'$.

— **Changement de base** pour un endomorphisme :

$$A'=P^{-1}AP$$

et pour $f:E\to F$: $A'=Q^{-1}AP$.

— Deux matrices **semblables** ($A'=P^{-1}AP$) ont même trace, même rang ; $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

— **Puissances** : si $A=PDP^{-1}$, alors $A^n=PD^nP^{-1}$.

— Toute matrice de rang r est **équivalente** à $J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$: $A=QJ_rP^{-1}$ avec P, Q inversibles.

Correction de l'exercice 1 – Matrice de la dérivation dans deux bases

a) $D(1)=0$, $D(X)=1$, $D(X^2)=2X$, $D(X^3)=3X^2$; les coordonnées de ces images forment les colonnes :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Avec $\varepsilon_k=\dfrac{X^k}{k!}$: $D(\varepsilon_0)=0$ et $D(\varepsilon_k)=\varepsilon_{k-1}$. La matrice B a des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs : c'est la forme la plus simple d'un nilpotent.

c) A^2 est la matrice de $P\mapsto P''$: ses seuls coefficients non nuls sont $(A^2)_{13}=2$ et $(A^2)_{24}=6$; A^3 n'a que $(A^3)_{14}=6$ ($D^3(X^3)=6$) ; $A^4=0$ car la dérivée quatrième d'un polynôme de degré ≤ 3 est nulle. D est nilpotente d'indice 4.

d) $P=\mathrm{diag}\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$ (les vecteurs de B' sont des multiples de ceux de la base canonique), $P^{-1}=\mathrm{diag}(1,1,2,6)$.

— $(P^{-1}AP)_{ij}=\dfrac{p_j}{p_i}a_{ij}$ pour des matrices diagonales. Coefficients non nuls : $(1,2)$: $\frac{1}{1}\times 1=1$; $(2,3)$: $\frac{1/2}{1}\times 2=1$; $(3,4)$: $\frac{1/6}{1/2}\times 3=1$. On retrouve B.

Réponse. A : surdiagonale $(1,2,3)$; B : surdiagonale $(1,1,1)$; $A^4=0$; $P=\mathrm{diag}(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – La translation P(X) donne P(X + 1) et le triangle de Pascal

a) $\tau(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i \le j} \binom{j}{i} X^i$: la colonne j contient les coefficients binomiaux $\binom{j}{i}$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— (triangle de Pascal, lu en colonnes).

b) $P \mapsto P(X-1)$ est l’inverse : $P(X+1-1) = P$. Sa matrice s’obtient de même avec $(X-1)^j = \sum_i \binom{j}{i}(-1)^{j-i} X^i$:

— $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\tau^2(P) = P(X+2)$, de matrice de coefficients $\binom{j}{i} 2^{j-i}$; c’est aussi T^2. Par exemple la dernière colonne : $(X+2)^3 = X^3 + 6X^2 + 12X + 8$, et $T \times (1,3,3,1)^{\mathsf{T}} = (1+3+3+1,\ 3+6+3,\ 3+3,\ 1) = (8,12,6,1)$.

d) $TT^{-1} = I_4$. Le coefficient (i,j) de ce produit est $\sum_k T_{ik}(T^{-1})_{kj}$, avec $T_{ik} = \binom{k}{i}$ et $(T^{-1})_{kj} = (-1)^{j-k}\binom{j}{k}$:

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k}\binom{k}{i} = \delta_{ij}$$

— (formule d’inversion de Pascal). Contrôle pour $i=0, j=2$: $1 - 2 + 1 = 0$.

Réponse. T : coefficients $\binom{j}{i}$; T^{-1} : $(-1)^{j-i}\binom{j}{i}$; $\tau^2(P) = P(X+2)$; inversion de Pascal.

Correction de l’exercice 3 – Matrice dans des bases quelconques

a) Colonnes $f(e_1) = (1,0)$, $f(e_2) = (1,1)$, $f(e_3) = (0,-1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $f(u_1) = (1,0) = v_1$; $f(u_2) = (0,-1)$; $f(u_3) = (0,0)$. Dans C' : $(0,-1) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$ donne $\beta = -1$, $\alpha = 1$. Donc

— $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (colonnes u_j), $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (colonnes $f(u_j)$ en base canonique) ; $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A'$.

d) $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = -x$ et $z = y$: $\ker f = \mathrm{Vect}(1,-1,-1) = \mathrm{Vect}(u_3)$. C’est lisible sur A' : sa

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

troisième colonne est nulle, car u_3 est dans le noyau.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\ker f = \mathrm{Vect}(u_3)$.

Correction de l'exercice 4 – Rotations : composer, c'est multiplier

a) $e_1 = (1, 0)$ tourne en $(\cos\theta, \sin\theta)$; $e_2 = (0, 1)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$, tourne en $\left(\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\right) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Ce sont les colonnes de R_θ.

b) Tourner de φ puis de θ revient à tourner de $\theta + \varphi$: $r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi}$, et la matrice de la composée est le produit. En comparant la première colonne :

$$R_\theta R_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

— ce qui donne les formules d'addition.

c) $R_\theta R_{-\theta} = R_0 = I_2$: $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = R_\theta^{\mathsf{T}}$. Par récurrence, $R_\theta^n = R_{n\theta}$.

d) C'est $R_{\pi/3}$; sa puissance sixième est $R_{2\pi} = I_2$.

Réponse. $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$; $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, $R_\theta^n = R_{n\theta}$; d) I_2.

Correction de l'exercice 5 – Coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base

a) Les colonnes de P sont les coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

— B' est libre (on l'a vu : $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$ impose $\alpha = \beta = \gamma = 0$), donc base, et P est inversible.

b) En résolvant $PX' = X$ pour $X = (x, y, z)$: $\alpha + \gamma = x$, $\alpha + \beta = y$, $\beta + \gamma = z$. La somme donne $\alpha + \beta + \gamma = \frac{x+y+z}{2}$, d'où

— $\alpha = \frac{x+y-z}{2}$, $\beta = \frac{-x+y+z}{2}$, $\gamma = \frac{x-y+z}{2}$, et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $X' = P^{-1}(2, 3, 5)^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2}(2 + 3 - 5, -2 + 3 + 5, 2 - 3 + 5) = (0, 3, 2)$.

— Vérification : $0 \cdot u_1 + 3u_2 + 2u_3 = (0, 3, 3) + (2, 0, 2) = (2, 3, 5)$.

d) P exprime les **nouveaux vecteurs** dans l'ancienne base ; elle transforme donc des nouvelles coordonnées en anciennes : $X = PX'$. Pour aller dans l'autre sens, on inverse : $X' = P^{-1}X$.

Réponse. $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $w = 3u_2 + 2u_3$, coordonnées $(0, 3, 2)$; $X = PX'$.

Correction de l'exercice 6 – Diagonaliser pour calculer les puissances

a) $f(1, 1) = (3, 3) = 3(1, 1)$ et $f(1, -1) = (1, -1)$. Dans B', $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$D = P^{-1}AP, \qquad A = PDP^{-1}$$

c) $A^n = PD^nP^{-1}$ (les $P^{-1}P$ intermédiaires se simplifient), avec $D^n = \mathrm{diag}(3^n, 1)$:

— $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}$.

— Contrôle $n=1$: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} = A$.

d) $\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$: $u_n = \frac{3^n+1}{2}$, $v_n = \frac{3^n-1}{2}$. Contrôle : $u_1 = 2$, $v_1 = 1$.

Réponse. $D = \mathrm{diag}(3, 1)$; $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}$; $u_n = \frac{3^n+1}{2}$, $v_n = \frac{3^n-1}{2}$.

Correction de l’exercice 7 – Réduire un nilpotent de taille 2

a) $A^2 = \begin{pmatrix}1-1 & -1+1\\ 1-1 & -1+1\end{pmatrix} = 0$. $\ker f$: $x - y = 0$, soit $\mathrm{Vect}(1, 1)$; $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1, 1)$ (les colonnes). On a $\mathrm{Im} f = \ker f$.

b) $x = e_1 = (1, 0) \notin \ker f$, $f(x) = (1, 1)$. $(f(x), x)$ est libre (non colinéaires) : base. $f(f(x)) = 0$ et $f(x) = f(x)$ donnent

$$N = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

c) $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (colonnes $f(x)$ et x), et $A = PNP^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Contrôle : $PN = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, et $PNP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

d) $A^2 = 0$ et I_2 commute avec A : par le binôme, $(I_2 + A)^n = I_2 + nA + 0 = \begin{pmatrix}1+n & -n\\ n & 1-n\end{pmatrix}$.

Réponse. $A^2 = 0$, $\ker f = \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1, 1)$; $N = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $(I_2 + A)^n = \begin{pmatrix}1+n & -n\\ n & 1-n\end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 8 – Matrices semblables ou non

a) $\mathrm{tr}(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik}b_{ki}$ et $\mathrm{tr}(BA) = \sum_k \sum_i b_{ki}a_{ik}$: mêmes termes. Donc

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}A$$

b) Le rang d’une matrice ne change pas par multiplication par une matrice inversible (à gauche ou à droite) : $\mathrm{rg}(P^{-1}AP) = \mathrm{rg}A$. Plus conceptuellement, ce sont deux matrices d’un même endomorphisme.

c) Non : si $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = P^{-1}I_2P$, alors elle vaudrait $P^{-1}P = I_2$. La seule matrice semblable à I_2 est I_2 (plus généralement à λI_n). Trace et rang ne suffisent donc pas.

d) Pour $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$: $Ae_1 = e_1$ et $A(1, 1) = (3, 3)$. Dans la base $(e_1, (1, 1))$, la matrice est $\mathrm{diag}(1, 3)$. Pour $B = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$: $Be_2 = e_2$ et $B(2, 5) = (6, 15) = 3(2, 5)$; dans la base $(e_2, (2, 5))$, la matrice est aussi $\mathrm{diag}(1, 3)$. Toutes deux sont semblables à $\mathrm{diag}(1, 3)$, donc **semblables** entre elles (la similitude est transitive).

Réponse. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$; semblables $\Rightarrow$ même trace, même rang ; c) non ; d) oui, toutes deux semblables à $\mathrm{diag}(1, 3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Matrice de la transposition

a) $T(E_{11}) = E_{11}$, $T(E_{12}) = E_{21}$, $T(E_{21}) = E_{12}$, $T(E_{22}) = E_{22}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— A est une matrice de permutation qui échange les coordonnées 2 et 3 : l'appliquer deux fois ne change rien, $A^2 = I_4$.

b) $\mathrm{tr} A = 2$. Pour une symétrie, dans une base adaptée à $\ker(T - \mathrm{id}) \oplus \ker(T + \mathrm{id})$, la matrice est $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$, donc $\mathrm{tr} = \dim S_2 - \dim A_2 = 3 - 1 = 2$.

c) Base $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21})$: les trois premières sont symétriques (image par T : elles-mêmes), la dernière antisymétrique. Matrice $\mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$.

d) $\mathrm{tr} T = \dim S_n - \dim A_n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$. Directement : dans la base des E_{ij}, les seuls E_{ij} fixés par T sont les E_{ii}, qui donnent les n coefficients diagonaux égaux à 1.

Réponse. A permute les coordonnées 2 et 3 ; $\mathrm{tr} A = 3 - 1 = 2$; base diagonalisante $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21})$; $\mathrm{tr} T = n$.

Correction de l'exercice 10 – Multiplication à gauche dans M2(R)

a) AM agit sur chaque **colonne** de M : la première colonne (m_{11}, m_{21}) devient $A(m_{11}, m_{21})^{\mathsf{T}}$, de même pour la seconde. Dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$, qui range les coefficients colonne par colonne :

$$\mathrm{Mat}(L_A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

b) $\mathrm{tr} L_A = 2\mathrm{tr} A$ et $\mathrm{rg} L_A = 2\mathrm{rg} A$ (matrice diagonale par blocs : les rangs des blocs s'ajoutent).

c) L_A bijective $\Leftrightarrow \mathrm{rg} L_A = 4 \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = 2 \Leftrightarrow A$ inversible. Alors $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$: $A^{-1}(AM) = M$ et $A(A^{-1}M) = M$.

d) MA agit sur les **lignes** de M : chaque ligne ℓ devient ℓA. Dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ (lignes les unes après les autres), la matrice de R_A est $\begin{pmatrix} A^{\mathsf{T}} & 0 \\ 0 & A^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$, de trace $2\mathrm{tr} A$ également.

Réponse. $\mathrm{Mat}(L_A) = \mathrm{diag}(A, A)$; $\mathrm{tr} L_A = 2\mathrm{tr} A$, $\mathrm{rg} L_A = 2\mathrm{rg} A$; $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$; $\mathrm{tr} R_A = 2\mathrm{tr} A$.

Correction de l'exercice 11 – Matrice de rang 1 et forme canonique J1

a) $L_1 = 2L_2$: rang 1. Chaque colonne est un multiple de $(2, 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad -1)$$

b) $\ker f$: $x + 2y - z = 0$, base $u_2 = (2, -1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 1)$. On complète avec $u_1 = e_1 = (1, 0, 0)$ (hors du noyau car $1 \neq 0$). $v_1 = f(u_1) = (2, 1)$, complété par $v_2 = (0, 1)$.

c) $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = f(u_3) = 0$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{Mat}_{(u),(v)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_1$$

— Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (colonnes u_j) et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (colonnes v_i) : $J_1 = Q^{-1}AP$, soit $A = QJ_1P^{-1}$. Contrôle : AP a pour colonnes $f(u_1) = (2,1)$, 0, 0, et QJ_1 a pour colonnes $(2,1)$, 0, 0.

d) Toute $A \in M_{p,n}$ de rang r s'écrit $A = QJ_rP^{-1}$, avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: même construction, en prenant une base d'un supplémentaire du noyau, complétée par une base du noyau, et les images, complétées en une base. Deux matrices de même taille sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Réponse. rg$A = 1$, $A = (2,1)^{\mathsf{T}}(1\ 2\ -1)$; matrice J_1 dans les bases adaptées ; $A = QJ_rP^{-1}$ en général.

Correction de l'exercice 12 – Formes coordonnées d'une base

a) L'application $w \mapsto$ (coordonnées dans B') est linéaire : c'est $w \mapsto P^{-1}w$. En résolvant $(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1)$:

$$u_1^*(x,y) = \frac{x+y}{2}, \qquad u_2^*(x,y) = \frac{x-y}{2}$$

b) $u_1^*(u_1) = \frac{1+1}{2} = 1$, $u_1^*(u_2) = 0$, $u_2^*(u_1) = 0$, $u_2^*(u_2) = \frac{1+1}{2} = 1$.

c) La matrice est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage : ses **lignes** sont les formes coordonnées.

d) La colonne j de la matrice contient les coordonnées de $f(u_j)$, et la i-ième coordonnée est $u_i^*(f(u_j))$. Pour $f(x,y) = (y,x)$: $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = (-1,1) = -u_2$.

— $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} u_1^*(u_1) & u_1^*(-u_2) \\ u_2^*(u_1) & u_2^*(-u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: la symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Réponse. $u_1^* = \frac{x+y}{2}$, $u_2^* = \frac{x-y}{2}$; lignes de P^{-1} ; $\mathrm{Mat}_{B'}(f)_{ij} = u_i^*(f(u_j))$; d) diag$(1,-1)$.

Correction de l'exercice 13 – Une symétrie non orthogonale

a) $s(1,2) = (1,2)$ et $s(1,0) = -(1,0)$: $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et

$$S = PS'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $S^2 = \begin{pmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. $s(0,1) = (1,1)$: on décompose $(0,1) = \frac{1}{2}(1,2) - \frac{1}{2}(1,0)$ et l'on change le signe de la composante sur D_2. Le segment joignant $(0,1)$ à $(1,1)$ est **horizontal** (parallèle à D_2) et son milieu $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ est sur D_1 : la symétrie « glisse » parallèlement à l'axe des abscisses, elle n'est pas orthogonale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $p = \frac{s+\mathrm{id}}{2}$, de matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$. Contrôle : $p(0,1) = \left(\frac{1}{2},1\right)$, sur D_1.

Réponse. $S = \begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$; $s(0,1) = (1,1)$; projection $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 14 – Trace d'endomorphismes de polynômes

a) Dans la base canonique, $D(X^k) = kX^{k-1}$ n'a pas de composante sur X^k : diagonale nulle, $\mathrm{tr}D = 0$. $\tau(X^k) = X^k + (\text{degré} < k)$: diagonale de 1, $\mathrm{tr}\tau = n+1$.

b) $u(X^k) = kX^k$: matrice diagonale $\mathrm{diag}(0,1,\ldots,n)$,

$$\mathrm{tr}u = 0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) $v(X^k) = 2^kX^k$: $\mathrm{tr}v = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$. $w(X^k) = (-1)^kX^k$: $\mathrm{tr}w = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$, qui vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair.

d) $\mathrm{tr}(f\circ g - g\circ f) = \mathrm{tr}(FG) - \mathrm{tr}(GF) = 0$, alors que $\mathrm{tr}(\mathrm{id}) = n+1 \neq 0$. (Sur $\mathbb{R}[X]$, de dimension infinie, la relation est possible : $D\circ M - M\circ D = \mathrm{id}$ avec $M : P \mapsto XP$; la trace n'y a pas de sens.)

Réponse. $\mathrm{tr}D = 0$, $\mathrm{tr}\tau = n+1$, $\mathrm{tr}u = \frac{n(n+1)}{2}$, $\mathrm{tr}v = 2^{n+1} - 1$; $f\circ g - g\circ f = \mathrm{id}$ impossible (trace).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la matrice J - I et ses puissances

a) $f(1,1,1) = (2,2,2)$. Pour $v = (x,y,z)$ avec $x+y+z = 0$:
$f(v) = (y+z, x+z, x+y) = (-x,-y,-z) = -v$.

b) $B' = ((1,1,1),(1,-1,0),(0,1,-1))$: le premier vecteur n'est pas dans le plan, les deux autres en forment une base, donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$D = \mathrm{diag}(2,-1,-1), \qquad P = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}, \qquad A = PDP^{-1}$$

c) J et I_3 commutent et $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geq 1$. Par le binôme :

— $A^n = (J - I_3)^n = (-1)^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}(-1)^{n-k}J = (-1)^nI_3 + \frac{(3-1)^n - (-1)^n}{3}J$.

— $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}J + (-1)^nI_3$. Contrôle : $n=1$ donne $J - I_3$; $n=2$ donne $J + I_3$, et en effet $A^2 = J^2 - 2J + I_3 = J + I_3$.

d) Le coefficient (i,j) de A^n compte les suites de n passes allant du joueur i au joueur j (A est la matrice d'adjacence du triangle). Retour au départ : coefficient diagonal

— $(A^n)_{11} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$. Contrôle : $n=2$ donne 2 (aller-retour vers l'un ou l'autre), $n=3$ donne $\frac{8-2}{3} = 2$ (les deux tours du triangle).

Réponse. $D = \mathrm{diag}(2,-1,-1)$; $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}J + (-1)^nI_3$; retours au départ : $\frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).