Plaquette 2 – Noyau, image et rang : calculer et raisonner

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Noyau, image, rang.

— $\ker f = f^{-1}(\{0\})$, $\mathrm{Im} f = f(E)$; f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.

— Si $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

— **Théorème du rang** ($\dim E$ finie) :

$$\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f$$

— $f \in L(E)$, $\dim E$ finie : injective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ bijective.

— **Composition** : $\ker f \subset \ker(g \circ f)$, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$, et

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg} f, \mathrm{rg} g)$$

— $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \ker g$.

— **Itérés** : $\ker f \subset \ker f^2 \subset \cdots$ et $\mathrm{Im} f \supset \mathrm{Im} f^2 \supset \cdots$

— **Formes linéaires** : le noyau d'une forme non nulle est un hyperplan ; deux formes de même noyau sont proportionnelles.

Correction de l'exercice 1 – Noyau et image dans R3

a) Les colonnes sont $f(e_1) = (1,2,1)$, $f(e_2) = (1,1,0)$, $f(e_3) = (-1,0,1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y,z) = 0$: la deuxième équation donne $y = -2x$, la troisième $z = -x$; la première devient $x - 2x + x = 0$, toujours vraie.

— $\ker f = \mathrm{Vect}((1,-2,-1))$, de dimension 1.

c) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. On remarque $f(e_3) = f(e_1) - 2f(e_2)$ (c'est la relation du noyau : $f(e_1 - 2e_2 - e_3) = 0$). Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,2,1),(1,1,0))$, plan.

— Équation : les lignes vérifient $L_3 = L_2 - L_1$, donc tout vecteur image (a,b,c) vérifie $c = b - a$: $\mathrm{Im} f = \{(a,b,c) \mid a - b + c = 0\}$. Contrôle : $1 - 2 + 1 = 0$ et $1 - 1 + 0 = 0$.

d) $\dim \ker f + \mathrm{rg} f = 1 + 2 = 3$. f n'est ni injective ni surjective (endomorphisme en dimension finie : les deux vont ensemble).

Réponse. $\ker f = \mathrm{Vect}(1,-2,-1)$; $\mathrm{Im} f$: plan $a - b + c = 0$; ni injective ni surjective.

Correction de l'exercice 2 – L'opérateur de différence

a) Linéarité : $(\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)$. Si $P = a_d X^d + \dots$ avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$, le terme en X^d s'élimine et celui en X^{d-1} vaut $a_d \binom{d}{1} = d a_d \neq 0$. Donc $\deg \Delta(P) = d - 1$.

b) Si $\deg P \geq 1$, $\Delta(P) \neq 0$: $\ker \Delta = \mathbb{R}_0[X]$ (les constantes). Par a), $\mathrm{Im}\Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg}\Delta = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— donc $\mathrm{Im}\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) $X^2 \in \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Im}\Delta$ (avec $n = 3$) : il existe P avec $\Delta P = X^2$, unique à une constante près (noyau), donc unique si $P(0) = 0$. On cherche $P = aX^3 + bX^2 + cX$:

— $\Delta(X^3) = 3X^2 + 3X + 1$, $\Delta(X^2) = 2X + 1$, $\Delta(X) = 1$;

— $a(3X^2 + 3X + 1) + b(2X + 1) + c = X^2$ donne $3a = 1$, $3a + 2b = 0$, $a + b + c = 0$;

— $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$: $P = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$.

d) Par télescopage, $\sum_{k=0}^{N} k^2 = \sum_{k=0}^{N} (P(k+1) - P(k)) = P(N+1) - P(0) = \frac{(N+1)N(2N+1)}{6}$.

Réponse. $\ker\Delta$ = constantes, $\mathrm{Im}\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$; $P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$;
$\sum k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Correction de l’exercice 3 – Un endomorphisme diagonal sur les monômes

a) $u(X^k) = X \cdot kX^{k-1} - X^k = (k-1)X^k$.

b) Pour $P = \sum a_k X^k$, $u(P) = \sum (k-1)a_k X^k$. Donc $u(P) = 0 \Leftrightarrow a_k = 0$ pour tout $k \neq 1$:

$$\ker u = \mathrm{Vect}(X), \qquad \mathrm{Im}u = \mathrm{Vect}(X^k,\ k \neq 1)$$

— (les $(k-1)X^k$ pour $k \neq 1$ sont des multiples non nuls de X^k). $\mathrm{rg}u = n$, et $1 + n = n + 1$.

c) Les deux sous-espaces sont engendrés par des parties disjointes de la base canonique, dont la réunion est la base : leur somme est directe et vaut $\mathbb{R}_n[X]$.

d) $X^3 - 1 \in \mathrm{Im}u$ (pas de terme en X). Une solution particulière : $u\left(\frac{1}{2}X^3\right) = X^3$ et $u(1) = -1$, donc $u\left(\frac{X^3}{2} + 1\right) = X^3 - 1$.

— Solutions : $P = \frac{X^3}{2} + 1 + \lambda X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (solution particulière + noyau). Contrôle : $X \cdot \frac{3X^2}{2} + \lambda X - \frac{X^3}{2} - 1 - \lambda X = X^3 - 1$.

Réponse. $u(X^k) = (k-1)X^k$; $\ker u = \mathrm{Vect}(X)$, $\mathrm{Im}u = \mathrm{Vect}(X^k, k \neq 1)$; $P = \frac{X^3}{2} + 1 + \lambda X$.

Correction de l’exercice 4 – Commutateur avec une matrice diagonale

a) $\varphi(\lambda M + N) = D(\lambda M + N) - (\lambda M + N)D = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$. Avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$DM = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}, \quad MD = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}, \quad \varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$: $\ker\varphi$ = matrices diagonales, $\mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22})$. $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}(E_{12}, E_{21})$ (tout $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ est atteint avec $b = -\beta$, $c = \gamma$). Rang : $2 + 2 = 4$.

c) Ici c’est évident sur la forme. En général, $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(MA)$ donne

— $\mathrm{tr}(AM - MA) = 0$: tout commutateur est de trace nulle. (Conséquence : $AM - MA = I_n$ est impossible.)

d) φ multiplie b par -1 et c par 1, et annule a, d : $\varphi^2(M) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi^3(M) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \varphi(M)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$; $\ker\varphi$ = diagonales, $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}(E_{12}, E_{21})$; commutateurs de trace nulle ; $\varphi^3 = \varphi$.

Correction de l'exercice 5 – Deux formes linéaires de même noyau

a) $\varphi \neq 0$, donc $\mathrm{Im}\varphi \neq \{0\}$; c'est un sous-espace de $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}$, rang 1, et $\dim\ker\varphi = n-1$. Si $\varphi(a) \neq 0$, $a \notin \ker\varphi$, et une droite non contenue dans un hyperplan en est un supplémentaire.

b) Posons $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ et $\theta = \psi - \lambda\varphi$. Alors θ s'annule sur $\ker\varphi$ (car $\ker\varphi \subset \ker\psi$) et en a (par choix de λ). Comme $E = \ker\varphi \oplus \mathrm{Vect}(a)$, θ est nulle :

$$\psi = \lambda\varphi$$

c) $(-2,2,-4) = -2(1,-1,2)$: $\psi = -2\varphi$, même noyau. $(1,-1,3)$ n'est pas proportionnel à $(1,-1,2)$: noyaux différents (le vecteur $(0,2,1)$ annule φ mais $\psi(0,2,1) = -2+3 = 1$).

d) Sur $\mathbb{R}_1[X]$: pour $P = a + bX$, $\varphi(P) = 2a + b$ et $\psi(P) = a + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\varphi(P)$. Même noyau (c'est l'exactitude de la méthode des trapèzes sur les fonctions affines). Sur $\mathbb{R}_2[X]$: $\varphi(X^2) = 1$, $\psi(X^2) = \frac{1}{3}$, alors que $\varphi(1) = 2$, $\psi(1) = 1$; le rapport n'est pas constant, donc ψ n'est pas proportionnelle à φ et, par b), les noyaux diffèrent. Par exemple $P = X^2 - \frac{1}{2}$: $\varphi(P) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ mais $\psi(P) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq 0$.

Réponse. $\ker\varphi \subset \ker\psi \Rightarrow \psi = \lambda\varphi$; c) oui pour $(-2,2,-4)$, non pour $(1,-1,3)$; d) même noyau sur $\mathbb{R}_1[X]$, pas sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction de l'exercice 6 – Composée nulle et inégalité sur les rangs

a) $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \forall x,\ g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}f,\ g(y) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}f \subset \ker g$.

b) Par a) et le théorème du rang appliqué à g :

$$\mathrm{rg}f = \dim\mathrm{Im}f \leq \dim\ker g = n - \mathrm{rg}g$$

c) Avec $g = f$: $2\mathrm{rg}f \leq n$. Exemple dans $\mathbb{R}^4$: $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_1$, $f(e_4) = e_2$. Alors $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset \ker f$, donc $f^2 = 0$, et $\mathrm{rg}f = 2$.

d) Soit g_1 la restriction de g à $F = \mathrm{Im}f$. Son image est $g(\mathrm{Im}f) = \mathrm{Im}(g \circ f)$ et son noyau $\ker g \cap F \subset \ker g$. Le théorème du rang pour g_1 donne :

— $\mathrm{rg}f = \dim F = \dim(\ker g \cap F) + \mathrm{rg}(g \circ f) \leq (n - \mathrm{rg}g) + \mathrm{rg}(g \circ f)$;
— d'où $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g - n$. Pour $g \circ f = 0$, on retrouve b).

Réponse. $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}f \subset \ker g$; $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g \leq n$; $f^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}f \leq \frac{n}{2}$; Sylvester.

Correction de l'exercice 7 – Noyaux et images itérés

a) Si $f(x) = 0$, alors $f^2(x) = f(0) = 0$. Si $y = f^2(x)$, alors $y = f(f(x)) \in \mathrm{Im}f$.

b) ($\Rightarrow$) Si $y \in \ker f \cap \mathrm{Im}f$, $y = f(x)$ avec $f^2(x) = f(y) = 0$; donc $x \in \ker f^2 = \ker f$ et $y = f(x) = 0$.

— ($\Leftarrow$) Si $f^2(x) = 0$, alors $f(x) \in \ker f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$, donc $x \in \ker f$; l'autre inclusion est a).

c) Par le théorème du rang pour f et f^2 :

$$\dim\ker f + \mathrm{rg}f = n = \dim\ker f^2 + \mathrm{rg}f^2$$

— Avec les inclusions de a),
$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \dim\ker f = \dim\ker f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}f = \mathrm{rg}f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Et $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ avec $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = n$ équivaut à $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$; on conclut avec b).

d) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\ker f = \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1)$, $f^2 = 0$, $\ker f^2 = E \neq \ker f$: la somme n'est pas directe.

— $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $J^2 = 2J$, $\ker f = \mathrm{Vect}(1,-1) = \ker f^2$, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1,1)$: $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

Réponse. $\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$; faux pour N, vrai pour J.

Correction de l'exercice 8 – Rang d'une composée

a) $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} g$, d'où la première inégalité. Pour la seconde, $g(\mathrm{Im} f)$ est l'image de $\mathrm{Im} f$ par l'application linéaire g restreinte, donc

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim g(\mathrm{Im} f) \leq \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f$$

— (l'image d'un espace de dimension r par une application linéaire est de dimension $\leq r$: image d'une base = famille génératrice).

b) Si g est injective, sa restriction à $\mathrm{Im} f$ l'est aussi, et une injection linéaire conserve la dimension : $\dim g(\mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{Im} f$. Si f est surjective, $\mathrm{Im} f = F$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(F) = \mathrm{Im} g$.

c) Pour $A \in M_{n,p}$, $P \in GL_n$, $Q \in GL_p$: l'endomorphisme associé à P est injectif et celui de Q surjectif, donc $\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg} A$. C'est ce qui justifie que les opérations élémentaires (produits par des matrices inversibles) conservent le rang.

d) Dans $\mathbb{R}^2$: f de matrice E_{11} et g de matrice E_{12} : $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} g = 1$, mais $E_{12}E_{11} = 0$, donc $\mathrm{rg}(g \circ f) = 0 < 1$.

Réponse. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg} f, \mathrm{rg} g)$; égalité si g injective ou f surjective ; $\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg} A$.

Correction de l'exercice 9 – Une relation polynomiale donne l'inverse

a) $f \circ (3\,\mathrm{id} - f) = 3f - f^2 = 2\,\mathrm{id}$, et de même $(3\,\mathrm{id} - f) \circ f = 2\,\mathrm{id}$. Donc f est bijective et

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(3\,\mathrm{id} - f)$$

b) Posons $y = 2x - f(x)$ et $z = f(x) - x$; alors $x = y + z$.

— $f(y) - y = 2f(x) - f^2(x) - 2x + f(x) = -(f^2(x) - 3f(x) + 2x) = 0$: $y \in \ker(f - \mathrm{id})$;

— $f(z) - 2z = f^2(x) - f(x) - 2f(x) + 2x = 0$: $z \in \ker(f - 2\,\mathrm{id})$.

— Intersection : si $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$, alors $x = 0$. Somme directe.

c) $f^3 = \mathrm{id}$: $f \circ f^2 = f^2 \circ f = \mathrm{id}$, donc $f^{-1} = f^2$. $f^2 = 0$: $(\mathrm{id} - f)(\mathrm{id} + f) = \mathrm{id} - f^2 = \mathrm{id}$, et dans l'autre ordre aussi.

d) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -2+2 & 0 \\ 0 & -2+2 \end{pmatrix} = 0$.

— $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_2 - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Contrôle : $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0+1 & 3-3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Réponse. $f^{-1} = \frac{1}{2}(3\,\mathrm{id} - f)$; $E = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id})$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 – Décalages sur les suites : la dimension infinie

a) Les termes de $S(\lambda u + v)$ sont $\lambda u_{n+1} + v_{n+1}$: linéarité ; de même pour T.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $S(u) = 0 \Leftrightarrow u_n = 0$ pour $n \geq 1$: $\ker S = \mathrm{Vect}(e_0)$ (suites nulles sauf peut-être au rang 0). S est **surjective** : toute suite v vaut $S(0, v_0, v_1, \ldots)$.

— $T(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$: T est **injective**. $\mathrm{Im} T$ est l'ensemble des suites de premier terme nul : T n'est pas surjective.

c) $S(T(u)) = S(0, u_0, u_1, \ldots) = (u_0, u_1, \ldots) = u$: $S \circ T = \mathrm{id}$. Mais $T(S(u)) = (0, u_1, u_2, \ldots)$:

$$T \circ S = \mathrm{id} - \pi_0, \qquad \pi_0(u) = (u_0, 0, 0, \ldots)$$

— donc $T \circ S \neq \mathrm{id}$.

d) En dimension finie, pour un endomorphisme, injectif $\Leftrightarrow$ surjectif, et $S \circ T = \mathrm{id}$ entraîne $T \circ S = \mathrm{id}$ (un inverse à droite est un inverse). Ici S est surjective non injective, T injective non surjective, et S a un inverse à droite sans être inversible. Le théorème du rang n'a plus de sens.

Réponse. $\ker S = \mathrm{Vect}(e_0)$, S surjective ; T injective, non surjective ; $S \circ T = \mathrm{id}$, $T \circ S \neq \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 11 – L'opérateur de primitivation

a) Linéarité de l'intégrale. Si $I(f) = 0$, la fonction $F = I(f)$ est nulle, donc sa dérivée $F' = f$ (théorème fondamental, f continue) est nulle : I est injective.

b) $I(f)$ est de classe C^1 et nulle en 0. Réciproquement, si $g \in C^1$ avec $g(0) = 0$, alors $g = I(g')$. Donc

$$\mathrm{Im} I = \{g \in C^1([0,1]) \mid g(0) = 0\}$$

— I n'est pas surjective (la fonction constante 1 n'est pas atteinte).

c) $D(I(f)) = f$: $D \circ I = \mathrm{id}_E$. Mais $I(D(g)) = \int_0^x g' = g(x) - g(0)$: $I \circ D = \mathrm{id} -$ (évaluation en 0), qui n'est pas l'identité. Même phénomène que pour les décalages : en dimension infinie, un inverse d'un côté n'en est pas un de l'autre.

d) Si $I(f) = \lambda f$: pour $\lambda = 0$, $f = 0$ par injectivité. Pour $\lambda \neq 0$, $F = I(f)$ vérifie $F = \lambda F'$ et $F(0) = 0$; donc $F(x) = F(0)\mathrm{e}^{x/\lambda} = 0$, puis $f = F' = 0$. Aucune valeur propre : un comportement impossible en dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Réponse. I injective ; $\mathrm{Im} I = \{g \in C^1, g(0) = 0\}$; $D \circ I = \mathrm{id}$, $I \circ D = \mathrm{id} - \delta_0$; pas de valeur propre.

Correction de l'exercice 12 – Prescrire noyau et image

a) Nécessité : c'est le théorème du rang. Suffisance : soit $(k_1, \ldots, k_p)$ une base de K, complétée en une base $(k_1, \ldots, k_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E, et $(\ell_{p+1}, \ldots, \ell_n)$ une base de L (même cardinal $n - p$). On définit f par

$$f(k_i) = 0, \qquad f(e_j) = \ell_j$$

— (une application linéaire est définie par les images d'une base). Alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(\ell_j) = L$, et $\mathrm{rg} f = n - p$ donne $\dim \ker f = p$; comme $K \subset \ker f$, $\ker f = K$.

b) Une idée naturelle : retrancher à x la moyenne de ses coordonnées,

— $f(x, y, z) = (x, y, z) - m(1, 1, 1)$ avec $m = \dfrac{x + y + z}{3}$.

— $f(1, 1, 1) = 0$, et les coordonnées de $f(v)$ ont une somme $x + y + z - 3m = 0$: $\mathrm{Im} f \subset L$. Rang : $\ker f$ est la droite (si $f(v) = 0$, $v = m(1, 1, 1)$), donc $\mathrm{rg} f = 2 = \dim L$, et $\mathrm{Im} f = L$.

$$\mathrm{Mat}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Si $v \in L$, $m = 0$ et $f(v) = v$: f vaut l'identité sur son image, donc $f^2 = f$. C'est la projection sur le plan L parallèlement à la droite K.

Réponse. Existe $\Leftrightarrow \dim K + \dim L = n$; $f(v) = v - \frac{x+y+z}{3}(1,1,1)$, matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, projecteur.

Correction de l'exercice 13 – Hyperplan de R4 et formes qui l'annulent

a) φ est non nulle : H est un hyperplan, $\dim H = 3$. Avec $x = -2y + z - t$:

— base $((-2,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1))$ (on donne successivement la valeur 1 à y, z, t).

b) $\varphi(u) = 1 + 1 = 2 \neq 0$, donc $u \notin H$ et $\mathbb{R}^4 = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$. Pour w, on cherche λ tel que $w - \lambda u \in H$:

$$\varphi(w - \lambda u) = \varphi(w) - \lambda\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\varphi(w)}{\varphi(u)} = \frac{3}{2}$$

— $w = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1, -\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}(1,0,0,1)$. Contrôle : $-\frac{1}{2} + 2 - 1 - \frac{1}{2} = 0$.

c) D'après l'exercice sur les formes de même noyau, $\ker\varphi \subset \ker\psi$ entraîne $\psi = \lambda\varphi$. Les formes cherchées sont les $\lambda(x + 2y - z + t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) La composante dans H est $p(w) = w - \frac{\varphi(w)}{\varphi(u)}u = w - \frac{\varphi(w)}{2}u$, expression linéaire en w (combinaison de w et d'une forme linéaire). Explicitement, $p(x,y,z,t) = (x,y,z,t) - \frac{x+2y-z+t}{2}(1,0,0,1)$: c'est la projection sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$.

Réponse. $\dim H = 3$; $w = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1, -\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}u$; $\psi = \lambda\varphi$; $p(w) = w - \frac{\varphi(w)}{2}u$.

Correction de l'exercice 14 – Un endomorphisme de Mn(R) faisant intervenir la trace

a) La trace est linéaire, donc $M \mapsto \mathrm{tr}(M)I_n$ l'est, et f est somme de deux applications linéaires.

b) Si $f(M) = 0$, alors $M = -\mathrm{tr}(M)I_n$. En prenant la trace : $\mathrm{tr}M = -n\mathrm{tr}M$, donc $(n+1)\mathrm{tr}M = 0$, $\mathrm{tr}M = 0$, puis $M = 0$. f est un endomorphisme injectif en dimension finie (n^2) : bijectif.

c) $\mathrm{tr}f(M) = \mathrm{tr}M + n\mathrm{tr}M = (n+1)\mathrm{tr}M$. Si $N = f(M)$, alors $\mathrm{tr}M = \frac{\mathrm{tr}N}{n+1}$ et

$$f^{-1}(N) = N - \frac{\mathrm{tr}N}{n+1}I_n$$

— Contrôle : $f\left(N - \frac{\mathrm{tr}N}{n+1}I_n\right) = N - \frac{\mathrm{tr}N}{n+1}I_n + \left(\mathrm{tr}N - \frac{n\mathrm{tr}N}{n+1}\right)I_n = N$.

d) Même calcul : $g_a(M) = 0 \Rightarrow (1+na)\mathrm{tr}M = 0$. Si $a \neq -\frac{1}{n}$, $\mathrm{tr}M = 0$ puis $M = 0$: bijective. Si $a = -\frac{1}{n}$, $g_a(M) = M - \frac{\mathrm{tr}M}{n}I_n$, et $g_a(I_n) = 0$: $\ker g_a$ contient I_n. Réciproquement, $g_a(M) = 0$ impose $M = \frac{\mathrm{tr}M}{n}I_n$: $\ker g_a = \mathrm{Vect}(I_n)$ (g_a est alors la projection sur les matrices de trace nulle).

Réponse. f bijective, $f^{-1}(N) = N - \frac{\mathrm{tr}N}{n+1}I_n$; g_a bijective ssi $a \neq -\frac{1}{n}$, sinon $\ker g_a = \mathrm{Vect}(I_n)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : la différence seconde

a) Pour $P = X^k$, on développe $(X+1)^k + (X-1)^k - 2X^k$: les termes de degré impair en 1 s’éliminent.

— $u(1) = 1 - 2 + 1 = 0$; $u(X) = (X+1) - 2X + (X-1) = 0$;
— $u(X^2) = (X^2 + 2X + 1) + (X^2 - 2X + 1) - 2X^2 = 2$;
— $u(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3 - 2X^3 = (2X^3 + 6X) - 2X^3 = 6X$.

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $u(a + bX + cX^2 + dX^3) = 2c + 6dX$: nul si et seulement si $c = d = 0$. $\ker u = \mathbb{R}_1[X]$ et $\mathrm{Im} u = \mathrm{Vect}(2, 6X) = \mathbb{R}_1[X]$. On remarque $\ker u = \mathrm{Im} u$ (rang 2, $2 + 2 = 4$).

c) $\mathrm{Im} u \subset \ker u$ signifie exactement $u \circ u = 0$. Sur la matrice : les colonnes non nulles de A sont $2e_1$ et $6e_2$, et A annule e_1, e_2 ; donc $A^2 = 0$.

d) On cherche une solution particulière : $u(X^3) = 6X$ et $u(X^2) = 2$, donc $u(X^3 + X^2) = 6X + 2$. Solutions : $P = X^3 + X^2 + a + bX$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse. $u(X^2) = 2$, $u(X^3) = 6X$; $\ker u = \mathrm{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$; $u^2 = 0$; $P = X^3 + X^2 + a + bX$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).