Plaquette 1 – Noyau, image, théorème du rang et matrices d'une application

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions.

— $f : E \to F$ est **linéaire** si $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Alors $f(0_E) = 0_F$.
— **Noyau** : $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$, sous-espace de E.
— **Image** : $\mathrm{Im} f = f(E)$, sous-espace de F, engendré par les images d'une base de E.
— **Rang** : $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f$.

Théorèmes clés.

— f **injective** $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.
— f **surjective** $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F$.
— **Théorème du rang** (avec $\dim E$ finie) :

$$\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f$$

— Si $\dim E = \dim F$ (finie) : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.
— **Matrice** : si $B = (e_j)$ est une base de E et C une base de F, la j-ième **colonne** de $\mathrm{Mat}_{B,C}(f)$ est le vecteur des coordonnées de $f(e_j)$ dans C.
— $\mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g) \times \mathrm{Mat}(f)$, et $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}(f))$.
— **Changement de base** : avec P la matrice de passage de B à B',

$$A' = P^{-1} A P \quad \text{(endomorphisme)}$$

Projecteurs et symétries.

— p est un **projecteur** si $p \circ p = p$; alors $E = \ker p \oplus \mathrm{Im} p$ et p est la projection sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.
— s est une **symétrie** si $s \circ s = \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 1 – Vérifier la linéarité

— a) **Oui.** Chaque composante est une combinaison linéaire de x et y ; la vérification $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ est immédiate.
— b) **Non.** $g(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$: une application linéaire envoie toujours 0 sur 0. C'est une application **affine**.
— c) **Non.** On teste l'additivité : $h(1,0) + h(0,1) = (0,1) + (0,0) = (0,1)$, alors que $h(1,1) = (1,1)$. Les deux diffèrent, donc h n'est pas linéaire — le terme xy est **quadratique**.
— **Critère rapide** : une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est linéaire si et seulement si chaque composante est une forme linéaire (degré 1 homogène, sans constante).

Réponse. a) oui · b) non (affine) · c) non (terme xy).

Correction de l'exercice 2 – Noyau et image

Noyau : on résout $x + y + z = 0$ et $x - y = 0$.

— La seconde donne $y = x$; la première devient $2x + z = 0$, donc $z = -2x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\ker f = \{(t, t, -2t)\} = \text{Vect}((1, 1, -2))$, de **dimension 1**.

Image : $\text{Im} f$ est engendrée par les images de la base canonique.

— $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, -1)$, $f(0, 0, 1) = (1, 0)$.

— Les deux premiers vecteurs sont déjà libres, donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$: f est **surjective**.

— **Contrôle par le théorème du rang** : $3 = \dim \ker f + \text{rg} f = 1 + 2$ ✓

— f n'est pas injective (noyau non nul), ce qui est inévitable puisque $\dim \mathbb{R}^3 > \dim \mathbb{R}^2$.

Réponse. $\ker f = \text{Vect}(1, 1, -2)$ et $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 3 – Matrice d'une application

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique — elle donne une **colonne**.

— $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \to$ première colonne.

— $f(0, 1, 0) = (2, 1, 0) \to$ deuxième colonne.

— $f(0, 0, 1) = (0, -1, 1) \to$ troisième colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y - z \\ x + z \end{pmatrix}$ ✓

— **Piège fréquent** : écrire les images en **lignes**. Les images se rangent en **colonnes**.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 – Théorème du rang

Théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker f + \text{rg} f$.

— Donc $4 = \dim \ker f + 2$, soit $\dim \ker f = 2$.

— **Surjectivité** : elle exigerait $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$, donc $\text{rg} f = 3$. Or le rang vaut 2 : f n'est **pas surjective**.

— **Injectivité** : le noyau est de dimension $2 \neq 0$, donc f n'est pas injective non plus.

— **Bornes générales** : $\text{rg} f \leq \min(\dim E, \dim F) = \min(4, 3) = 3$.

— **Conséquence de dimension** : une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ n'est **jamais** injective ($\dim \ker \geq 1$), quelle qu'elle soit.

Réponse. $\dim \ker f = 2$; f n'est ni injective ni surjective.

Correction de l'exercice 5 – Endomorphisme et bijectivité

Matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

— $\det A = 4 - 3 = 1 \neq 0$: A est inversible, donc f est **bijective**.

— **Inverse** : $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

— **Expression** : $f^{-1}(x, y) = (2x - y, -3x + 2y)$.

— **Vérification** : $f^{-1}(f(x, y)) = (2(2x + y) - (3x + 2y), -3(2x + y) + 2(3x + 2y)) = (x, y)$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Raccourci de dimension égale** : il aurait suffi de montrer $\ker f = \{0\}$ pour conclure à la bijectivité, puisque $\dim E = \dim F$ est finie.

Réponse. $f^{-1}(x, y) = (2x - y,\ -3x + 2y)$.

Correction de l'exercice 6 – Projecteur

a) On calcule $p \circ p$. Si $u = p(x, y) = (s, s)$ avec $s = \dfrac{x + y}{2}$, alors

$$p(s, s) = \left(\frac{s + s}{2},\ \frac{s + s}{2}\right) = (s, s)$$

— Donc $p \circ p = p$: p est un **projecteur**.

b) - **Image** : $\mathrm{Im} p = \{(s, s)\} = \mathrm{Vect}((1, 1))$, la **première bissectrice**.

— **Noyau** : $p(x, y) = 0$ équivaut à $x + y = 0$, donc $\ker p = \mathrm{Vect}((1, -1))$.

— **Vérification de la somme directe** : $\dim \ker + \dim \mathrm{Im} = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, et les deux droites sont distinctes ✓

— **Nature géométrique** : p est la projection **orthogonale** sur la droite $y = x$, car $\ker p$ (dirigé par $(1, -1)$) est orthogonal à $\mathrm{Im} p$.

Réponse. b) $\mathrm{Im} p = \mathrm{Vect}(1, 1)$, $\ker p = \mathrm{Vect}(1, -1)$.

Correction de l'exercice 7 – Symétrie

— **Involution** : $s(s(x, y)) = s(y, x) = (x, y)$, donc $s \circ s = \mathrm{id}$: s est une **symétrie**.

— **Éléments caractéristiques** : on cherche les vecteurs fixes et les vecteurs changés en leur opposé.

— $s(u) = u$ donne $y = x$: le sous-espace des **invariants** est $\mathrm{Vect}((1, 1))$.

— $s(u) = -u$ donne $y = -x$: le sous-espace **anti-invariant** est $\mathrm{Vect}((1, -1))$.

— s est donc la **symétrie par rapport à la droite** $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ — c'est-à-dire la symétrie **orthogonale** d'axe la première bissectrice.

— **Lien avec les projecteurs** : $p = \dfrac{\mathrm{id} + s}{2}$ est le projecteur de l'exercice précédent. Toute symétrie s'écrit $s = 2p - \mathrm{id}$.

Réponse. Symétrie orthogonale d'axe $y = x$, de direction $y = -x$.

Correction de l'exercice 8 – Application linéaire sur les polynômes

— **Linéarité** : la dérivation est linéaire, $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$.

— **Noyau** : $P' = 0$ équivaut à P **constant**, donc $\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$, de dimension 1.

— **Image** : la dérivée d'un polynôme de degré ≤ 3 est de degré ≤ 2, et tout polynôme de degré ≤ 2 est une dérivée (prendre une primitive). Donc $\mathrm{Im} \varphi = \mathbb{R}_2[X]$, de **dimension 3**.

— **Rang** : $\mathrm{rg} \varphi = 3$.

— **Contrôle par le théorème du rang** : $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 = 1 + 3$ ✓

— **Matrice** dans la base $\left(1, X, X^2, X^3\right)$: les images sont 0, 1, $2X$, $3X^2$, d'où une matrice **nilpotente** (sa puissance quatrième est nulle, puisque dériver quatre fois annule tout polynôme de degré ≤ 3).

Réponse. ker = constantes, Im = $\mathbb{R}_2[X]$, rang 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Composition

Matrices dans la base canonique : $A = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

— $\mathrm{Mat}(g \circ f) = BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

— $\mathrm{Mat}(f \circ g) = AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

— **Les deux diffèrent** : la composition n'est pas commutative, ce qui reflète $BA \neq AB$.

— **Vérification directe** : $g(f(x,y)) = g(x+y,\, x-y) = (2x+2y,\, 3x-3y)$ ✓ ;
$f(g(x,y)) = f(2x, 3y) = (2x+3y,\, 2x-3y)$ ✓

— **Ordre des matrices** : dans $\mathrm{Mat}(g \circ f)$, la matrice de f (appliquée en premier) est **à droite**.

Réponse. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 – Changement de base

Matrice de passage : P a pour colonnes les nouveaux vecteurs exprimés dans l'ancienne base :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Formule** : $A' = P^{-1}AP$.

— Calcul de AP : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

— Puis $P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

— **Résultat** : $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ — la matrice est **diagonale** dans cette base.

— **Interprétation** : $(1,0)$ et $(-1,1)$ sont des **vecteurs propres** de f, de valeurs propres 3 et 2.

— **Contrôle** : $f(-1,1) = (-3+1,\, 2) = (-2,2) = 2 \times (-1,1)$ ✓

Réponse. $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 – Formes linéaires et hyperplans

φ est une **forme linéaire** non nulle, donc surjective : $\mathrm{rg}\varphi = 1$.

— **Théorème du rang** : $\dim\ker\varphi = 3 - 1 = 2$ — c'est un **hyperplan** (ici un plan) de $\mathbb{R}^3$.

— **Résolution** : $2x - y + 3z = 0$ donne $y = 2x + 3z$.

— $(x, y, z) = (x,\, 2x+3z,\, z) = x(1,2,0) + z(0,3,1)$.

— **Base de** $\ker\varphi$: $((1,2,0), (0,3,1))$ — famille libre (regarder les première et troisième coordonnées).

— **Vérification** : $2 - 2 + 0 = 0$ ✓ et $0 - 3 + 3 = 0$ ✓

— **Règle générale** : le noyau d'une forme linéaire non nulle sur un espace de dimension n est toujours de dimension $n-1$.

Réponse. Plan de base $((1,2,0),(0,3,1))$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – La dérivation sur les polynômes

a) $(\lambda P+Q)'=\lambda P'+Q'$: D est linéaire. $P'=0$ si et seulement si P est constant : $\ker D=\mathbb{R}_0[X]$.

— L'image est engendrée par les images de la base canonique : $D(X^k)=kX^{k-1}$, donc $\mathrm{Im}D=\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^{n-1})=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Théorème du rang :

$$\dim\mathbb{R}_n[X]=\dim\ker D+\mathrm{rg}D,\quad\text{soit}\quad n+1=1+n$$

c) D n'est ni injective ($\ker D\neq\{0\}$) ni surjective ($X^n\notin\mathrm{Im}D$) : en dimension finie, pour un endomorphisme, les deux défauts vont ensemble.

— Sur $\mathbb{R}[X]$ (dimension infinie), Δ n'est pas injective mais elle est **surjective** : tout $Q=\sum a_kX^k$ est la dérivée de $\sum\frac{a_k}{k+1}X^{k+1}$. L'équivalence « injective ⇔ surjective » exige la dimension finie.

d) $D^{n+1}(P)=P^{(n+1)}=0$ pour $\deg P\leq n$. Mais $D^n(X^n)=n!\neq 0$. D est **nilpotente** d'indice $n+1$.

Réponse. $\ker D=\mathbb{R}_0[X]$, $\mathrm{Im}D=\mathbb{R}_{n-1}[X]$; ni injective ni surjective ; sur $\mathbb{R}[X]$: surjective non injective ; $D^{n+1}=0$.

Correction de l'exercice 13 – Image d'une famille libre, d'une famille génératrice

a) Tout $x\in E$ s'écrit $\sum x_ie_i$, et par linéarité $f(x)=\sum x_if(e_i)$. Donc $\mathrm{Im}f$ est l'ensemble des combinaisons des $f(e_i)$.

b) Pour des scalaires x_i :

$$\sum x_if(e_i)=0\Leftrightarrow f(\sum x_ie_i)=0\Leftrightarrow\sum x_ie_i\in\ker f$$

— Si $\ker f=\{0\}$, on obtient $\sum x_ie_i=0$, donc tous les x_i sont nuls : la famille est libre. Réciproquement, si la famille est libre et $x=\sum x_ie_i\in\ker f$, alors $\sum x_if(e_i)=0$, donc $x=0$.

c) Bijective ⇔ injective et surjective ⇔ $(f(e_i))$ libre (par b) et génératrice de F (par a)) ⇔ base de F.

d) On teste la liberté : $a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,0,1)=(a+c,a+b,b+c)=0$. En sommant, $2(a+b+c)=0$, puis $b=0$, $c=0$, $a=0$. Libre, trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: base, donc f est un isomorphisme.

Réponse. $\mathrm{Im}f=\mathrm{Vect}(f(e_i))$; injective ⇔ $(f(e_i))$ libre ; isomorphisme ⇔ base ; d) oui.

Correction de l'exercice 14 – Évaluation en plusieurs points : un isomorphisme

a) $(\lambda P+Q)(a)=\lambda P(a)+Q(a)$ en chaque point : φ est linéaire. Si $\varphi(P)=0$, P (de degré ≤ 2) a trois racines distinctes : $P=0$. Donc $\ker\varphi=\{0\}$.

b) $\dim\mathbb{R}_2[X]=3=\dim\mathbb{R}^3$: une application linéaire injective entre espaces de même dimension finie est bijective (théorème du rang : $\mathrm{rg}\varphi=3-0=3$).

c) Colonnes : images de 1, X, X^2, c'est-à-dire leurs valeurs en 0, 1, 2 :

$$\mathrm{Mat}(\varphi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— (matrice de Vandermonde).

d) $\varphi^{-1}(1,0,0)$ est l'unique polynôme de degré ≤ 2 valant 1 en a_0 et 0 en a_1, a_2 : c'est le polynôme de Lagrange L_0. De même pour L_1, L_2. L'isomorphisme φ^{-1} envoie la base canonique sur la **base de Lagrange** ; pour $(0,1,2)$: $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_1 = -X(X-2)$, $L_2 = \frac{X(X-1)}{2}$.

Réponse. φ isomorphisme ; matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; φ^{-1} envoie la base canonique sur la base de Lagrange.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : noyau et image d'un endomorphisme

a) **Rang** : les lignes L_2 et L_3 sont respectivement $2L_1$ et $3L_1$; toutes les colonnes sont aussi proportionnelles à $(1,2,3)$.

— Donc $\operatorname{rg} f = 1$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,2,3))$.
— **Noyau** : $AX = 0$ se réduit à l'unique équation $x + 2y + 3z = 0$, donc $\dim \ker f = 2$.
— Une base : $((2,-1,0), (3,0,-1))$ — on vérifie $2 - 2 + 0 = 0$ ✓ et $3 + 0 - 3 = 0$ ✓
— **Contrôle** : $\dim \ker + \operatorname{rg} = 2 + 1 = 3$ ✓

b) **Calcul de A^2.** Écrivons $A = CL$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $L = (1 \quad 2 \quad 3)$.

— Alors $A^2 = C(LC)L$, et $LC = 1 + 4 + 9 = 14$ est un **scalaire**.
— Donc $A^2 = 14A$.
— **Interprétation** : $p = \frac{f}{14}$ vérifie $p \circ p = p$ — c'est un **projecteur** sur la droite $\operatorname{Im} f$, parallèlement à $\ker f$.
— **Vérification d'un coefficient** : $\left(A^2\right)_{11} = 1 + 4 + 9 = 14 = 14 \times A_{11}$ ✓

Réponse. a) rang 1, Im = Vect$(1,2,3)$, ker = plan $x + 2y + 3z = 0$ · b) $A^2 = 14A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).