# Plaquette 3 – Projecteurs, symétries et endomorphismes remarquables

## Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Projecteurs et symétries.**

— Si $E = F \oplus G$, la **projection** sur $F$ parallèlement à $G$ est $p(f+g) = f$ ; c'est un projecteur, avec $\mathrm{Im}\, p = F = \ker(p - \mathrm{id})$ et $\ker p = G$.

— Réciproquement, si $p \circ p = p$ :

$$E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p, \qquad x = (x - p(x)) + p(x)$$

— La **symétrie** par rapport à $F$ parallèlement à $G$ est $s = 2p - \mathrm{id}$ ; $s^2 = \mathrm{id}$ ; réciproquement, si $s^2 = \mathrm{id}$, $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$ et $p = \frac{s + \mathrm{id}}{2}$ est un projecteur.

— Projection sur un hyperplan $H = \ker \varphi$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(a)$ ($\varphi(a) \neq 0$) :

$$p(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\, a$$

— En dimension finie, pour un projecteur : $\mathrm{tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$.

— **Nilpotent** : $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$ ; si $f^{p-1}(x) \neq 0$, $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

— **Sous-espace stable** : $f(F) \subset F$. Si $f \circ g = g \circ f$, $\ker g$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont stables par $f$.

## Correction de l'exercice 1 – Projection sur un plan parallèlement à une droite

a) $\varphi(x,y,z) = x + y + z$ et $\varphi(d) = 6 \neq 0$ : $d \notin P$. Une droite non contenue dans un hyperplan en est un supplémentaire.

b) On cherche $p(v) = v - \lambda d$ avec $v - \lambda d \in P$ : $\varphi(v) - 6\lambda = 0$, donc

$$p(v) = v - \frac{\varphi(v)}{6}\, d = v - \frac{x+y+z}{6}(1,2,3)$$

— Colonnes : $p(e_1) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $p(e_2) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $p(e_3) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, soit

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $A = I_3 - \frac{1}{6} dL$ avec $L = (1\ 1\ 1)$ et $Ld = 6$ :
$A^2 = I_3 - \frac{2}{6} dL + \frac{1}{36} d(Ld)L = I_3 - \frac{1}{3} dL + \frac{1}{6} dL = A$. Trace : $\frac{5+4+3}{6} = 2 = \dim P = \mathrm{rg}\, p$.

d) $s = 2p - \mathrm{id}$, soit $S = 2A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

— $s(1,0,0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right)$. Contrôle : le milieu de $(1,0,0)$ et de son image, $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, est dans $P$ ($\frac{5}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = 0$) et leur différence $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right) = -\frac{1}{3} d$ est dans $D$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $p(v) = v - \frac{x+y+z}{6}(1,2,3)$ ; $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ ; $s(1,0,0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right)$.

## Correction de l'exercice 2 – Un projecteur est une projection

a) Si $y = p(x)$, $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ : $\mathrm{Im} p \subset \ker(p - \mathrm{id})$. Si $p(y) = y$, $y$ est une image. Égalité.

b) Tout $x$ s'écrit

$$x = (x - p(x)) + p(x), \qquad p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$$

— donc $E = \ker p + \mathrm{Im} p$. Si $y \in \ker p \cap \mathrm{Im} p$, alors $y = p(y) = 0$ (par a)). Somme directe. Dans cette décomposition, $p$ garde la composante dans $\mathrm{Im} p$ et annule l'autre : c'est la projection annoncée.

c) $q^2 = \mathrm{id} - 2p + p^2 = \mathrm{id} - p = q$. $\ker q = \ker(p - \mathrm{id}) = \mathrm{Im} p$ et $\mathrm{Im} q = \ker(\mathrm{id} - q) = \ker p$ : $q$ est la projection **complémentaire**.

d) $M^2 = \begin{pmatrix} 4-2 & -4+2 \\ 2-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M$ : projecteur.

— Im = Vect$(2,1)$ (les colonnes sont colinéaires à $(2,1)$) ; ker : $2x - 2y = 0$, soit Vect$(1,1)$. Trace 1 = rang. C'est la projection sur la droite Vect$(2,1)$ parallèlement à Vect$(1,1)$.

**Réponse.** $E = \ker p \oplus \mathrm{Im} p$ ; $\mathrm{id} - p$ projecteur complémentaire ; $M$ projette sur Vect$(2,1)$ parallèlement à Vect$(1,1)$.

## Correction de l'exercice 3 – Symétries : involutions

a) $p^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \mathrm{id}) = \frac{1}{4}(2s + 2\,\mathrm{id}) = p$.

b) Par l'exercice précédent, $E = \mathrm{Im} p \oplus \ker p$. Or

$$p(x) = x \Leftrightarrow s(x) = x, \qquad p(x) = 0 \Leftrightarrow s(x) = -x$$

— donc $\mathrm{Im} p = \ker(p - \mathrm{id}) = \ker(s - \mathrm{id})$ et $\ker p = \ker(s + \mathrm{id})$. Si $x = y + z$ avec $s(y) = y$ et $s(z) = -z$, alors $s(x) = y - z$ : $s$ est la **symétrie** par rapport à $\ker(s - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id})$. Explicitement, $y = \frac{x + s(x)}{2}$ et $z = \frac{x - s(x)}{2}$.

c) $s \circ s = \mathrm{id}$ : $s$ est bijective et $s^{-1} = s$.

d) $s(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow x = y$ : $\ker(s - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1,1)$. $s(x,y) = -(x,y) \Leftrightarrow y = -x$ : $\ker(s + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1,-1)$. C'est la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (les deux droites sont perpendiculaires). Exemple : $(3,1) = (2,2) + (1,-1)$ a pour image $(2,2) - (1,-1) = (1,3)$.

**Réponse.** $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$, $s^{-1} = s$ ; d) symétrie par rapport à $y = x$ parallèlement à $y = -x$.

## Correction de l'exercice 4 – La transposition et le changement de variable P(-X)

a) $T$ est linéaire et $(M^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = M$ : $T^2 = \mathrm{id}$. $\ker(T - \mathrm{id}) = S_n$ (symétriques) et $\ker(T + \mathrm{id}) = A_n$ (antisymétriques) : on retrouve $M_n = S_n \oplus A_n$.

b) Le projecteur sur $S_n$ parallèlement à $A_n$ est

$$p = \frac{T + \mathrm{id}}{2}, \qquad p(M) = \frac{M + M^{\mathsf{T}}}{2}$$

— Sa trace (comme endomorphisme) vaut son rang, $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\sigma$ est linéaire, $\sigma^2(P) = P(-(-X)) = P$. $\ker(\sigma - \mathrm{id})$ : $P(-X) = P(X)$, polynômes **pairs** (seulement des puissances paires) ; $\ker(\sigma + \mathrm{id})$ : polynômes **impairs**.

d) $\sigma(X^k) = (-1)^k X^k$ : la matrice est diagonale, $\mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots)$. Pour $n = 5$ : $\mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1)$, donc chacun des deux sous-espaces est de dimension 3 (pairs : $1, X^2, X^4$ ; impairs : $X, X^3, X^5$). Contrôle par la trace : $\mathrm{tr}\,\sigma = 3 - 3 = 0 = \dim\ker(\sigma - \mathrm{id}) - \dim\ker(\sigma + \mathrm{id})$.

**Réponse.** $T$ : symétrie par rapport à $S_n$ parallèlement à $A_n$ ; $\mathrm{tr}\,p = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ; $\sigma$ : pairs $\oplus$ impairs, dimensions 3 et 3 pour $n = 5$.

## Correction de l'exercice 5 – Le reste de la division euclidienne est un projecteur

a) Si $P = BQ_1 + R_1$ et $P' = BQ_2 + R_2$ avec $\deg R_i \leq 1$, alors $\lambda P + P' = B(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$ avec $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq 1$. Par **unicité** du couple (quotient, reste), $r(\lambda P + P') = \lambda r(P) + r(P')$.

b) Si $\deg P \leq 1$, $P = B \times 0 + P$ : $r(P) = P$. Donc $r \circ r = r$ ($r(P)$ est de degré $\leq 1$). Image : $\mathbb{R}_1[X]$ ; noyau : les multiples de $B$ dans $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\ker r = (X^2 - 1)\,\mathbb{R}_{n-2}[X], \qquad \mathbb{R}_n[X] = \ker r \oplus \mathbb{R}_1[X]$$

c) Écrivons $r(P) = a + bX$. En évaluant $P = BQ + r(P)$ en 1 et $-1$ (racines de $B$) : $a + b = P(1)$ et $a - b = P(-1)$, donc

— $r(P) = \dfrac{P(1) + P(-1)}{2} + \dfrac{P(1) - P(-1)}{2} X$.

d) $X^n$ vaut 1 en 1 et $(-1)^n$ en $-1$ : si $n$ est pair, $r(X^n) = 1$ ; si $n$ est impair, $r(X^n) = X$. Contrôle : $X^2 = (X^2 - 1) + 1$ et $X^3 = X(X^2 - 1) + X$.

**Réponse.** $r$ projecteur sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $(X^2 - 1)\mathbb{R}_{n-2}[X]$ ; $r(P) = \dfrac{P(1) + P(-1)}{2} + \dfrac{P(1) - P(-1)}{2} X$ ; $r(X^n) = 1$ ou $X$.

## Correction de l'exercice 6 – Somme de deux projecteurs

a) $(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + 0 + 0 + q = p + q$.

b) $(p + q)^2 = p + q$ donne, après simplification par $p^2 = p$ et $q^2 = q$ :

$$p \circ q + q \circ p = 0$$

— Composons à gauche par $p$ : $p \circ q + p \circ q \circ p = 0$. À droite par $p$ : $p \circ q \circ p + q \circ p = 0$. Par différence, $p \circ q = q \circ p$ ; avec la relation encadrée, $2p \circ q = 0$, donc $p \circ q = q \circ p = 0$ (on divise par 2 : il faut que $2 \neq 0$ dans le corps).

c) $\mathrm{Im}(p + q) \subset \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$. Réciproquement, si $y = p(a)$, alors $(p + q)(y) = p^2(a) + q \circ p(a) = y$ : $y \in \mathrm{Im}(p + q)$ ; de même pour $\mathrm{Im}\,q$. Somme directe : si $y \in \mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Im}\,q$, $y = q(y)$ et $y = p(y)$, donc $y = p(q(y)) = 0$.

d) $p$ : projection sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ ; $q$ : projection sur $\mathrm{Vect}(e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. Matrices $E_{11}$ et $E_{22}$, de produits nuls ; $p + q$ a pour matrice $E_{11} + E_{22}$ : projection sur le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_3)$.

**Réponse.** $p + q$ projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$ ; alors $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Im}\,q$ ; exemple $E_{11} + E_{22}$.

## Correction de l'exercice 7 – Composée de projecteurs qui commutent

a) $r^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q = r$ (on a permuté le $q$ central avec $p$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Si $y \in \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$, $q(y) = y$ et $p(y) = y$, donc $r(y) = y$ : $y \in \mathrm{Im}r$. Réciproquement, $r(x) = p(q(x)) \in \mathrm{Im}p$ et $r(x) = q(p(x)) \in \mathrm{Im}q$.

— Noyau : $\ker p \subset \ker r$ (car $r = q \circ p$) et $\ker q \subset \ker r$ (car $r = p \circ q$). Si $r(x) = 0$, on écrit

$$x = (x - q(x)) + q(x), \qquad x - q(x) \in \ker q, \quad p(q(x)) = 0$$

— donc $q(x) \in \ker p$ et $x \in \ker q + \ker p$.

c) $s = p + q - pq$ vérifie $\mathrm{id} - s = (\mathrm{id} - p) \circ (\mathrm{id} - q)$, composée de deux projecteurs qui commutent : c'est un projecteur par a), donc $s$ aussi. Et $\mathrm{Im}s = \ker(\mathrm{id} - s) = \ker(\mathrm{id} - p) + \ker(\mathrm{id} - q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$ par b).

d) $p(x, y, z) = (x, y, 0)$, $q(x, y, z) = (0, y, z)$ ; elles commutent : $p \circ q(x, y, z) = (0, y, 0) = q \circ p(x, y, z)$. C'est la projection orthogonale sur l'axe $(Oy)$, intersection des deux plans.

**Réponse.** $p \circ q$ projecteur, Im = $\mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$, ker = $\ker p + \ker q$ ; d) projection sur $(Oy)$.

## Correction de l'exercice 8 – Trace d'un projecteur

a) $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$. On prend une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathrm{Im}p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\ker p$ ; leur réunion est une base de $E$ (somme directe). Comme $p(e_i) = e_i$ pour $i \le r$ et $p(e_i) = 0$ sinon, la matrice est diagonale avec $r$ fois 1 puis des 0.

b) La trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base (matrices semblables : $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}A$), donc

$$\mathrm{tr}p = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r = \mathrm{rg}p$$

c) $A = \frac{1}{3}J$ avec $J^2 = 3J$ (chaque coefficient de $J^2$ vaut $1 + 1 + 1$). Donc $A^2 = \frac{1}{9} \times 3J = \frac{1}{3}J = A$. Rang = $\mathrm{tr}A = \frac{1+1+1}{3} = 1$ : projection sur la droite $\mathrm{Vect}(1, 1, 1)$.

d) Oui : $M$ est un projecteur de rang $\mathrm{tr}M = 0$, donc d'image $\{0\}$ : $M = 0$. (Sans l'hypothèse $M^2 = M$, c'est faux : $E_{12}$ est non nulle et de trace nulle.)

**Réponse.** Base adaptée : $\mathrm{diag}(I_r, 0)$ ; $\mathrm{tr}p = \mathrm{rg}p$ ; $A = \frac{1}{3}J$ projecteur de rang 1 ; d) oui.

## Correction de l'exercice 9 – Endomorphismes nilpotents

a) Supposons $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$ avec des $\lambda_k$ non tous nuls, et soit $j$ le plus petit indice tel que $\lambda_j \neq 0$. On applique $f^{p-1-j}$ :

$$\sum_{k \ge j} \lambda_k f^{k+p-1-j}(x) = \lambda_j f^{p-1}(x) + \sum_{k > j} \lambda_k f^{k+p-1-j}(x) = 0$$

— Pour $k > j$, l'exposant $k + p - 1 - j$ est $\ge p$, donc $f^{k+p-1-j} = 0$ : la seconde somme est nulle.

— donc $\lambda_j f^{p-1}(x) = 0$ avec $f^{p-1}(x) \neq 0$ : $\lambda_j = 0$, contradiction.

b) Une famille libre de $p$ vecteurs dans un espace de dimension $n$ : $p \le n$. Donc $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

c) Notons $\varepsilon_1 = f^{n-1}(x)$, …, $\varepsilon_n = x$ : $f(\varepsilon_1) = f^n(x) = 0$ et $f(\varepsilon_k) = \varepsilon_{k-1}$. La matrice a des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs (bloc de Jordan nilpotent).

d) Comme $f^n = 0$ : $(\mathrm{id} - f)(\mathrm{id} + f + \dots + f^{n-1}) = \mathrm{id} - f^n = \mathrm{id}$, et de même dans l'autre sens. Donc $(\mathrm{id} - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k$, analogue de la série géométrique.

**Réponse.** Famille libre, donc $p \le n$ et $f^n = 0$ ; matrice : 1 au-dessus de la diagonale ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(\mathrm{id} - f)^{-1} = \sum_{k<n} f^k$.

## Correction de l'exercice 10 – Quand chaque vecteur est envoyé sur un vecteur colinéaire

a) $(x, f(x))$ liée avec $x \neq 0$ : $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$, donc $f(x) = \lambda_x x$ ; $\lambda_x$ est unique car $x \neq 0$.

b) D'une part $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ ($x+y \neq 0$ car non colinéaires), d'autre part $f(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Donc

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

— et $(x, y)$ est libre : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

c) Si $y = \mu x$ ($\mu \neq 0$) : $f(y) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y$, donc $\lambda_y = \lambda_x$. Tous les $\lambda_x$ sont égaux à un même $\lambda$, et $f(x) = \lambda x$ pour tout $x$ (y compris $x = 0$) : $f = \lambda\,\mathrm{id}$.

d) Les homothéties commutent avec tout. Réciproquement, soit $f$ commutant avec tout endomorphisme, et $x \neq 0$. Soit $p$ un projecteur d'image $\mathrm{Vect}(x)$ (projection sur cette droite parallèlement à un supplémentaire). Alors $\mathrm{Im}p$ est stable par $f$ : $f(x) = f(p(x)) = p(f(x)) \in \mathrm{Vect}(x)$. Donc $(x, f(x))$ est liée pour tout $x$, et $f$ est une homothétie par c).

**Réponse.** $\lambda_x$ indépendant de $x$ : $f = \lambda\,\mathrm{id}$ ; le centre de $L(E)$ est formé des homothéties.

## Correction de l'exercice 11 – Sous-espaces stables et commutation

a) Si $g(x) = 0$, $g(f(x)) = f(g(x)) = 0$ : $f(x) \in \ker g$. Si $y = g(x)$, $f(y) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}g$.

b) $g - \lambda\,\mathrm{id}$ commute aussi avec $f$ ; on applique a).

c) Le sens direct est a). Réciproquement, supposons $\ker p$ et $\mathrm{Im}p$ stables. Pour $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}p$, $b \in \ker p$ :

$$f(p(x)) = f(a), \qquad p(f(x)) = p(f(a)) + p(f(b)) = f(a) + 0$$

— car $f(a) \in \mathrm{Im}p$ (où $p$ vaut l'identité) et $f(b) \in \ker p$. Donc $f \circ p = p \circ f$.

d) $\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}(e_1)$, $\ker p = \mathrm{Vect}(e_2)$. $f$ commute avec $p$ si et seulement si $f(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et $f(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_2)$ : ce sont les endomorphismes de matrice **diagonale** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Vérification directe : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{11}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, égales si et seulement si $b = c = 0$.

**Réponse.** $\ker g$, $\mathrm{Im}g$ stables par $f$ ; $f \circ p = p \circ f \Leftrightarrow \ker p$, $\mathrm{Im}p$ stables ; d) matrices diagonales.

## Correction de l'exercice 12 – Le quart de tour n'a pas de droite stable

a) $r(x, y) = (-y, x)$ : rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine. $R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ : $r^2 = -\mathrm{id}$ (demi-tour).

b) Une droite $\mathrm{Vect}(u)$ est stable si et seulement si $r(u) = \lambda u$. Alors $r^2(u) = \lambda^2 u = -u$, donc $\lambda^2 = -1$ : impossible pour $\lambda$ réel. Aucune droite stable.

c) Avec le déterminant (chapitre suivant) : $\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\mathrm{id}) = (-1)^n$. Un carré réel est positif, donc $(-1)^n = 1$ et $n$ est pair.

— (Sans déterminant : pour $x \neq 0$, $(x, f(x))$ est libre par b), et $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable ; on construit ainsi une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en plans stables.)

d) Sur $\mathbb{C}$, $\lambda^2 = -1$ a les solutions $\pm i$. $r(1, -i) = (i, 1) = i(1, -i)$ et $r(1, i) = (-i, 1) = -i(1, i)$ : les droites complexes $\mathrm{Vect}(1, -i)$ et $\mathrm{Vect}(1, i)$ sont stables. Le corps de base change tout.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $r$ quart de tour, $r^2 = -\mathrm{id}$ ; pas de droite stable sur $\mathbb{R}$ ; $f^2 = -\mathrm{id} \Rightarrow n$ pair ; sur $\mathbb{C}$ : $\mathrm{Vect}(1, \mp i)$ stables.

## Correction de l'exercice 13 – Projecteur de rang 1

a) $p(p(x)) = \varphi(x)\,p(a) = \varphi(x)\varphi(a)\,a = \varphi(x)\,a = p(x)$. Image : $\mathrm{Vect}(a)$ ($p(a) = a$) ; noyau : $\ker\varphi$ (hyperplan).

b) $p(x) = C(Lx) = (CL)x$ par associativité : la matrice est $CL$ (matrice de rang 1). $\varphi(a) = LC = 1$ (produit ligne-colonne, un scalaire). Et $(CL)^2 = C(LC)L = CL$.

c) Si $p$ est un projecteur de rang 1, $\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a \neq 0$, et $p(a) = a$. Pour tout $x$, $p(x) \in \mathrm{Vect}(a)$ : $p(x) = \varphi(x)a$, où $\varphi(x)$ est l'unique coordonnée ; $\varphi$ est linéaire (car $p$ l'est et $a \neq 0$) et $\varphi(a) = 1$.

d) $a = (1, 1, 0)$, $\psi(x, y, z) = x - 2y + z$, $\psi(a) = -1$. On normalise : $\varphi = \dfrac{\psi}{\psi(a)} = -\psi$, soit $\varphi(x, y, z) = -x + 2y - z$.

$$\mathrm{Mat}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Contrôle : trace $-1 + 2 + 0 = 1 = \mathrm{rang}$ ; $p(a) = (-1 + 2, -1 + 2, 0) = a$.

**Réponse.** $p = \varphi(\cdot)a$ projecteur sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à $\ker\varphi$ ; matrice $CL$ avec $LC = 1$ ; d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 14 – Affinités et dilatations

a) $f_\lambda(y + z) = y + \lambda z$ : $F$ est fixe et $G$ est dilaté d'un facteur $\lambda$. $f_0 = p$, $f_1 = \mathrm{id}$, $f_{-1} = 2p - \mathrm{id}$ (la symétrie).

b) $f_\lambda \circ f_\mu(y + z) = f_\lambda(y + \mu z) = y + \lambda\mu z = f_{\lambda\mu}(y + z)$. Pour $\lambda \neq 0$ : $f_\lambda \circ f_{1/\lambda} = f_1 = \mathrm{id}$ dans les deux sens, donc $f_\lambda^{-1} = f_{1/\lambda}$.

c) Sur $y \in F$ : $f_\lambda(y) = y$, et $(1 - (1 + \lambda) + \lambda)y = 0$. Sur $z \in G$ : $f_\lambda(z) = \lambda z$, et $(\lambda^2 - (1 + \lambda)\lambda + \lambda)z = 0$. Par linéarité, la relation est vraie sur $F \oplus G = E$ :

$$(f_\lambda - \mathrm{id}) \circ (f_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$$

d) $e_1 \mapsto e_1$ et $(1, 1) \mapsto (2, 2)$. Or $e_2 = (1, 1) - e_1$, donc $f_2(e_2) = (2, 2) - (1, 0) = (1, 2)$. Matrice :

— $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Contrôle : $f_2(1, 1) = (1 + 1, 2) = (2, 2)$.

**Réponse.** $f_\lambda(y + z) = y + \lambda z$ ; $f_\lambda \circ f_\mu = f_{\lambda\mu}$, $f_\lambda^{-1} = f_{1/\lambda}$ ; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la symétrie P(X) donne P(1 - X)

a) $s$ est linéaire (composition à droite par $1 - X$) et $s(s(P)) = P(1 - (1 - X)) = P$.

b) $s(1) = 1$, $s(X) = 1 - X$, $s(X^2) = 1 - 2X + X^2$ :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— (par exemple, la troisième colonne de $S^2$ est $S(1,-2,1)^{\mathsf{T}} = (1-2+1, 2-2, 1) = (0,0,1)$).

c) $1 - X - \frac{1}{2} = -\left(X - \frac{1}{2}\right)$ : $s$ change $Y$ en $-Y$. Donc $s(1) = 1$, $s(Y) = -Y$, $s(Y^2) = Y^2$.

— $\ker(s - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1, Y^2) = \mathrm{Vect}(1, (X - \frac{1}{2})^2)$, de dimension 2 ;

— $\ker(s + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(Y) = \mathrm{Vect}\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Contrôle : $\mathrm{tr}S = 1 - 1 + 1 = 1 = 2 - 1$.

d) $p = \frac{s + \mathrm{id}}{2}$, soit $p(P) = \frac{P(X) + P(1-X)}{2}$.

— $p(X^2) = \frac{X^2 + 1 - 2X + X^2}{2} = X^2 - X + \frac{1}{2} = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, bien dans $\mathrm{Vect}(1, Y^2)$. Et $X^2 - p(X^2) = X - \frac{1}{2} \in \ker(s + \mathrm{id})$.

**Réponse.** $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $\ker(s - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1, (X - \frac{1}{2})^2)$, $\ker(s + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(X - \frac{1}{2})$ ; $p(X^2) = X^2 - X + \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).