Plaquette 5 – Applications linéaires en situation : interpolation, opérateurs, synthèse

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

De nombreux théorèmes d'existence sont en réalité des **isomorphismes** : une application linéaire injective entre espaces de même dimension finie est bijective, ce qui donne l'existence « gratuitement » à partir de l'unicité (interpolation de Lagrange ou d'Hermite, restes chinois, suites récurrentes). D'autres questions se ramènent à l'étude d'un **opérateur** (dérivation, décalage, différence, flou) restreint à un sous-espace **stable** de dimension finie, où l'on peut écrire une matrice, l'inverser, la réduire. On termine par des problèmes de synthèse qui combinent noyau, image, rang, matrices et changements de base.

Exercice 1 – Interpolation d'Hermite

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$, $P \mapsto (P(0), P'(0), P(1), P'(1))$.

a) Montrer que φ est linéaire et injective (un polynôme de $\ker \varphi$ a deux racines doubles).

b) En déduire que φ est un isomorphisme.

c) Déterminer l'unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P(1) = 1$, $P'(1) = 0$.

d) Déterminer $\varphi^{-1}(0,0,1,0)$ et $\varphi^{-1}(0,0,0,1)$.

Exercice 2 – Restes chinois pour les polynômes

Soit $\psi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ qui à P associe le couple (reste de P modulo X^2, reste de P modulo $(X-1)^2$).

a) Montrer que ψ est linéaire et que les deux espaces ont la même dimension.

b) Montrer que ψ est injective, puis que c'est un isomorphisme.

c) Déterminer l'unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P \equiv 1 \pmod{X^2}$ et $P \equiv 0 \pmod{(X-1)^2}$.

d) Déterminer $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P \equiv 1 + 2X \pmod{X^2}$ et $P \equiv 0 \pmod{(X-1)^2}$.

Exercice 3 – Formes linéaires et formule de Simpson

Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère les formes $\delta_0 : P \mapsto P(0)$, $\delta_1 : P \mapsto P(1)$, $\delta_2 : P \mapsto P(2)$ et $\iota : P \mapsto \int_0^2 P(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ est une base de l'espace E^* des formes linéaires sur E (qui est de dimension 3).

b) En déduire qu'il existe des réels uniques α, β, γ tels que $\iota = \alpha\delta_0 + \beta\delta_1 + \gamma\delta_2$.

c) Les calculer en appliquant l'égalité à 1, X, X^2.

d) Vérifier que la formule obtenue est encore exacte pour X^3 (vu dans $\mathbb{R}_3[X]$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Le décalage restreint aux suites récurrentes

Soit R l'espace des suites réelles telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, et $S : u \mapsto (u_{n+1})_n$ le décalage.

a) Montrer que R est stable par S.

b) Montrer que $a = (2^n)$ et $b = ((-1)^n)$ forment une base de R, et écrire la matrice de S_R dans cette base.

c) Écrire la matrice de S_R dans la base (e, f) où e et f sont les suites de R de premiers termes $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

d) Vérifier que ces deux matrices sont semblables et interpréter.

Exercice 5 – Primitiver en inversant une matrice

Soit $V = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$, et $D : f \mapsto f'$.

a) Montrer que (f_0, f_1, f_2) est libre et que V est stable par D.

b) Écrire la matrice A de D_V dans la base (f_0, f_1, f_2) et justifier que D_V est bijective.

c) En calculant A^{-1}, déterminer une primitive de $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$.

d) Résoudre dans V l'équation $y' - y = x\mathrm{e}^x$. Toutes les solutions réelles sont-elles dans V ?

Exercice 6 – Formes linéaires invariantes par commutation

Soit f une forme linéaire sur $M_n(\mathrm{K})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes A, B.

a) Rappeler que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

b) Montrer que $f(E_{ij}) = 0$ pour $i \neq j$ (écrire $E_{ij} = E_{ii}E_{ij}$).

c) Montrer que $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$ pour tous i, j.

d) En déduire que $f = \lambda \mathrm{tr}$ pour un scalaire λ.

Exercice 7 – Toute forme linéaire sur Mn(K) est une trace tordue

Pour $A \in M_n(\mathrm{K})$, on note $\varphi_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$.

a) Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $M_n(\mathrm{K})$ et que $\Phi : A \mapsto \varphi_A$ est linéaire.

b) Calculer $\varphi_A(E_{ij})$ et en déduire que Φ est injective.

c) En déduire que toute forme linéaire ℓ sur $M_n(\mathrm{K})$ s'écrit $\ell = \varphi_A$ pour une unique A, et exprimer A à l'aide des $\ell(E_{ij})$.

d) Application : pour $n = 2$, trouver A telle que $\mathrm{tr}(AM) = m_{12} + 3m_{21}$ pour tout M.

Exercice 8 – Flou d'un signal circulaire : peut-on revenir en arrière ?

On représente un signal périodique de n échantillons par $x \in \mathbb{R}^n$ (indices modulo n). Le « flou » est $B(x) = y$ avec $y_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ (et $x_{n+1} = x_1$).

a) Écrire la matrice de B pour $n = 3$ et pour $n = 4$.

b) Pour $n = 4$, montrer que $(1, -1, 1, -1) \in \ker B$. Peut-on retrouver le signal à partir du signal flouté ?

c) Pour $n = 3$, montrer que B est injective, et résoudre $B(x) = (1, 2, 3)$.

d) Généraliser : pour quels n le flou est-il inversible ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – L'opérateur de Legendre

Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = ((X^2-1)P')'$.

a) Montrer que u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer $u(X^k)$.

b) En déduire que la matrice de u dans la base canonique est triangulaire supérieure, et donner sa diagonale.

c) Pour $n = 2$, écrire cette matrice et trouver un polynôme unitaire P_2 de degré 2 tel que $u(P_2) = 6P_2$.

d) Déterminer $\ker u$ et le rang de u.

Exercice 10 – Construire une application linéaire par des images

On cherche $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$f(1,1,0) = (1,0), \qquad f(0,1,1) = (0,1), \qquad f(1,2,1) = (1,1)$$

a) Montrer que ces conditions sont compatibles, mais ne déterminent pas f.

b) On impose de plus $f(1,0,0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe une unique f et donner sa matrice.

c) Même question si la troisième condition est remplacée par $f(1,2,1) = (1,2)$.

Exercice 11 – Les complexes comme matrices réelles

Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, soit $m_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto zw$, vue comme application $\mathbb{R}$-linéaire.

a) Écrire la matrice $M(z)$ de m_z dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$.

b) Montrer que $M(zz') = M(z)M(z')$ et $M(z+z') = M(z) + M(z')$.

c) Interpréter $M(e^{i\theta})$ et $M(i)$. Calculer $M(i)^2$.

d) Montrer que l'ensemble $\{M(z)\}$ est un sous-espace de dimension 2 de $M_2(\mathbb{R})$, et que $M(z)$ est inversible si et seulement si $z \neq 0$, d'inverse $M(z^{-1})$.

Exercice 12 – Le bit de parité

Sur $E = \mathrm{F}_2^n$ ($\mathrm{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), soit $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$.

a) Montrer que π est une forme linéaire non nulle ; en déduire la dimension et le cardinal de $P = \ker \pi$.

b) Interpréter P en termes de nombre de 1 dans le mot.

c) On transmet un message de $n-1$ bits en ajoutant un bit final pour que le mot soit dans P. Montrer que l'application de codage $c : \mathrm{F}_2^{n-1} \to \mathrm{F}_2^n$ est linéaire, injective, d'image P.

d) Montrer qu'une erreur sur un seul bit est toujours détectée, mais pas deux.

Exercice 13 – Commutant d'une matrice diagonale

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec des λ_i **deux à deux distincts**, et $C(D) = \{M \mid MD = DM\}$.

a) Calculer $(MD - DM)_{ij}$ et en déduire que $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales. Quelle est sa dimension ?

b) Montrer que $I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ appartiennent à $C(D)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que cette famille est libre (on pourra utiliser un polynôme s'annulant en tous les λ_i).

d) En déduire que toute matrice commutant avec D est un polynôme en D.
Exemple : écrire $\mathrm{diag}(1,0,0)$ comme polynôme en $D = \mathrm{diag}(0,1,2)$.

Exercice 14 – Formule de Newton par les différences finies

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, soit $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $H_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ ($H_0 = 1$).

a) Montrer que $\Delta(H_k) = H_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $\Delta(H_0) = 0$. Écrire la matrice de Δ dans la base $(H_0, \ldots, H_n)$.

b) En déduire que si $P = \sum_k c_k H_k$, alors $c_k = (\Delta^k P)(0)$.

c) Application : $P = X^3$. Calculer $P(0), P(1), P(2), P(3)$, puis le tableau des différences successives, et en déduire les coordonnées de X^3 dans la base (H_k).

d) En déduire une formule pour $\sum_{m=0}^{N-1} m^3$.

Exercice 15 – Synthèse : une récurrence d'ordre 3 et sa matrice compagnon

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$ et $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

a) Écrire $U_{n+1} = CU_n$ avec $U_n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2})^{\mathsf{T}}$ et C la matrice compagnon.

b) Déterminer les suites géométriques (r^n) vérifiant la relation, et vérifier que $(1, r, r^2)$ est alors un vecteur tel que $C(1,r,r^2)^{\mathsf{T}} = r(1,r,r^2)^{\mathsf{T}}$.

c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de C est diagonale, et l'expression de u_n.

d) Vérifier la formule pour u_3 et u_4.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).