Plaquette 4 – Matrices d'applications linéaires et changements de base

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

La matrice de f dans des bases B (départ) et C (arrivée) se construit **colonne par colonne** : la j-ième colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans C. Composer revient à multiplier, inverser à inverser. Changer de base revient à conjuguer : $A' = P^{-1}AP$ pour un endomorphisme. Tout l'art est de **choisir une base adaptée** (vecteurs propres, base d'un noyau et d'une image, suite $x, f(x), f^2(x)\ldots$) dans laquelle la matrice devient diagonale, triangulaire ou presque nulle, ce qui rend les calculs de puissances, d'inverses et de rangs immédiats.

Exercice 1 – Matrice de la dérivation dans deux bases

Soit $D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$.

a) Écrire la matrice A de D dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.

b) Écrire sa matrice B dans la base $B' = \left(1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6}\right)$.

c) Calculer A^2, A^3, A^4 et interpréter.

d) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à B', et vérifier $B = P^{-1}AP$.

Exercice 2 – La translation P(X) donne P(X + 1) et le triangle de Pascal

Soit $\tau : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1)$.

a) Écrire la matrice T de τ dans la base canonique. Reconnaître ses coefficients.

b) Justifier que τ est bijective et donner τ^{-1}, puis T^{-1} sans calcul.

c) Calculer la matrice de τ^2 de deux façons.

d) En déduire l'identité $\sum_k (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \binom{k}{i} = \delta_{ij}$ pour $0 \le i, j \le 3$.

Exercice 3 – Matrice dans des bases quelconques

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y,\ y - z)$.

a) Écrire la matrice A de f dans les bases canoniques.

b) On munit $\mathbb{R}^3$ de la base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0)$, $u_3 = (1, -1, -1)$, et $\mathbb{R}^2$ de la base $C' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$. Écrire $A' = \mathrm{Mat}_{B', C'}(f)$.

c) Vérifier la formule $A' = Q^{-1}AP$ avec les matrices de passage P et Q.

d) Déterminer le noyau de f et comparer avec A'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Rotations : composer, c'est multiplier

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit r_θ la rotation vectorielle d'angle θ du plan, de matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Justifier cette matrice en calculant $r_\theta(e_1)$ et $r_\theta(e_2)$.

b) Montrer que $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, et en déduire les formules d'addition du cosinus et du sinus.

c) En déduire R_θ^{-1} et R_θ^n.

d) Calculer $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^6$ sans multiplication.

Exercice 5 – Coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $B' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,0,1)$.

a) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à B', et justifier que B' est une base.

b) Calculer P^{-1}.

c) Déterminer les coordonnées de $w = (2,3,5)$ dans B' et vérifier.

d) Pourquoi est-ce P^{-1}, et non P, qui donne les nouvelles coordonnées ?

Exercice 6 – Diagonaliser pour calculer les puissances

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé.

a) Calculer $f(1,1)$ et $f(1,-1)$. En déduire la matrice D de f dans la base $B' = ((1,1),(1,-1))$.

b) Écrire P et P^{-1}, et la relation entre A et D.

c) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Application : $u_{n+1} = 2u_n + v_n$, $v_{n+1} = u_n + 2v_n$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$. Exprimer u_n et v_n.

Exercice 7 – Réduire un nilpotent de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé.

a) Calculer A^2. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

b) Choisir $x \notin \ker f$ et montrer que $B' = (f(x), x)$ est une base. Écrire la matrice de f dans B'.

c) Écrire la relation $A = PNP^{-1}$ correspondante.

d) En déduire $(I_2 + A)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 – Matrices semblables ou non

a) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour $A, B \in M_n(\mathrm{K})$, et en déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

b) Montrer que deux matrices semblables ont le même rang.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et I_2 ont même trace et même rang. Sont-elles semblables ?

d) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? (Chercher des vecteurs x tels que $f(x) = \lambda x$.)

Exercice 9 – Matrice de la transposition

Soit $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{\mathsf{T}}$, et la base $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

a) Écrire la matrice A de T dans B et vérifier $A^2 = I_4$.

b) Calculer $\operatorname{tr} A$ et interpréter à l'aide des dimensions de S_2 et A_2.

c) Trouver une base de $M_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de T est diagonale.

d) Généraliser : quelle est la trace de la transposition sur $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 10 – Multiplication à gauche dans M2(R)

Soit $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ et $L_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM$.

a) Écrire la matrice de L_A dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ (attention à l'ordre).

b) En déduire $\operatorname{tr} L_A$ et $\operatorname{rg} L_A$ en fonction de A.

c) Montrer que L_A est bijective si et seulement si A est inversible, et donner L_A^{-1}.

d) Même question pour $R_A : M \mapsto MA$: quelle est sa trace ?

Exercice 11 – Matrice de rang 1 et forme canonique J1

Soit $A = \begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer le rang de A et écrire $A = CL$ avec C colonne et L ligne.

b) Construire une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ avec $u_2, u_3 \in \ker f$, et une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = f(u_1)$.

c) Écrire la matrice de f dans ces bases et en déduire $A = QJ_1P^{-1}$ avec P, Q explicites.

d) Énoncer le résultat général pour une matrice de rang r.

Exercice 12 – Formes coordonnées d'une base

Soit $B' = (u_1, u_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ avec $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$. Pour $w \in \mathbb{R}^2$, on note $u_1^*(w)$ et $u_2^*(w)$ ses coordonnées dans B'.

a) Montrer que u_1^* et u_2^* sont des formes linéaires et les expliciter.

b) Vérifier que $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$.

c) Écrire la matrice de l'application $w \mapsto (u_1^*(w), u_2^*(w))$ et la relier à la matrice de passage.

d) Soit $f \in L(\mathbb{R}^2)$. Montrer que le coefficient (i, j) de $\operatorname{Mat}_{B'}(f)$ vaut $u_i^*(f(u_j))$, et l'appliquer à $f(x, y) = (y, x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Une symétrie non orthogonale

Dans $\mathbb{R}^2$, soit s la symétrie par rapport à $D_1 = \text{Vect}(1,2)$ parallèlement à $D_2 = \text{Vect}(1,0)$.

a) Écrire la matrice de s dans la base $B' = ((1,2),(1,0))$.

b) En déduire sa matrice S dans la base canonique.

c) Vérifier $S^2 = I_2$ et calculer $s(0,1)$. Interpréter géométriquement.

d) Écrire la matrice de la projection sur D_1 parallèlement à D_2.

Exercice 14 – Trace d'endomorphismes de polynômes

On rappelle que la trace d'un endomorphisme est celle de sa matrice dans n'importe quelle base.

a) Calculer la trace de $D : P \mapsto P'$ et de $\tau : P \mapsto P(X+1)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer la trace de $u : P \mapsto XP'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Calculer la trace de $v : P \mapsto P(2X)$, puis celle de $w : P \mapsto P(-X)$.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes f, g de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $f \circ g - g \circ f = \text{id}$.

Exercice 15 – Synthèse : la matrice J - I et ses puissances

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

a) Écrire $A = J - I_3$ où J est la matrice remplie de 1. Calculer $f(1,1,1)$ et $f(v)$ pour v dans le plan $x + y + z = 0$.

b) En déduire une base B' dans laquelle la matrice de f est diagonale, la matrice D et la matrice de passage P.

c) Calculer A^n en utilisant $J^2 = 3J$ et le binôme (ou en écrivant $A^n = \alpha_n J + \beta_n I_3$).

d) Application : trois joueurs se passent un ballon ; à chaque passe, le porteur le donne à l'un des deux autres. Combien y a-t-il de suites de n passes qui ramènent le ballon au joueur de départ ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).