Plaquette 2 – Noyau, image et rang : calculer et raisonner

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour **calculer** : le noyau est l'ensemble des solutions d'un système homogène ; l'image est engendrée par les images d'une base (ou d'une famille génératrice) ; le **théorème du rang** relie leurs dimensions et sert de contrôle. Pour **raisonner** sans coordonnées : on traduit les hypothèses en inclusions entre noyaux et images ($f \circ g = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} g \subset \ker f$), on compose, on applique le théorème du rang à une restriction ou à une composée. En dimension finie, pour un endomorphisme, **injectif, surjectif et bijectif sont équivalents** ; en dimension infinie, non.

Exercice 1 – Noyau et image dans R3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x + y,\ x + z)$.

a) Écrire la matrice A de f dans la base canonique.

b) Déterminer $\ker f$ (base et dimension).

c) Déterminer $\mathrm{Im} f$: une base, puis une équation.

d) Vérifier le théorème du rang et dire si f est injective, surjective.

Exercice 2 – L'opérateur de différence

Soit $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X + 1) - P(X)$ $(n \geq 1)$.

a) Montrer que Δ est linéaire et que $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$.

b) En déduire $\ker \Delta$ et $\mathrm{Im} \Delta$.

c) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta(P) = X^2$ et $P(0) = 0$. Le déterminer.

d) En déduire $\sum_{k=0}^{N} k^2$.

Exercice 3 – Un endomorphisme diagonal sur les monômes

Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto XP' - P$ $(n \geq 2)$.

a) Calculer $u(X^k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

b) En déduire $\ker u$, $\mathrm{Im} u$ et le rang de u.

c) Montrer que $\ker u \oplus \mathrm{Im} u = \mathbb{R}_n[X]$.

d) Résoudre $XP' - P = X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \geq 3)$.

Exercice 4 – Commutateur avec une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto DM - MD$.

a) Montrer que φ est linéaire et calculer $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b) Déterminer $\ker \varphi$ et $\mathrm{Im} \varphi$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que toute matrice de $\mathrm{Im}\varphi$ est de trace nulle. Est-ce vrai pour tout commutateur $AM - MA$?

d) Montrer que $\varphi^3 = \varphi$.

Exercice 5 – Deux formes linéaires de même noyau

Soit E un espace de dimension n, et φ, ψ deux formes linéaires sur E avec $\varphi \neq 0$.

a) Montrer que $\ker\varphi$ est un hyperplan, et que $E = \ker\varphi \oplus \mathrm{Vect}(a)$ pour tout a tel que $\varphi(a) \neq 0$.

b) On suppose $\ker\varphi \subset \ker\psi$. Montrer qu'il existe λ tel que $\psi = \lambda\varphi$ (poser $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$).

c) Application : les formes $\varphi(x,y,z) = x - y + 2z$ et $\psi(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ s'annulent-elles sur le même plan pour $(\alpha,\beta,\gamma) = (-2,2,-4)$? pour $(1,-1,3)$?

d) Montrer que $\varphi(P) = P(0) + P(1)$ et $\psi(P) = \int_0^1 P$ n'ont pas le même noyau sur $\mathbb{R}_2[X]$, mais ont le même noyau sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 6 – Composée nulle et inégalité sur les rangs

Soient $f, g \in L(E)$ avec $\dim E = n$.

a) Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}f \subset \ker g$.

b) En déduire que si $g \circ f = 0$, alors $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g \leq n$.

c) Soit f tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}f \leq \frac{n}{2}$. Donner un exemple en dimension 4 avec $\mathrm{rg}f = 2$.

d) Montrer plus généralement que $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g - n$ (inégalité de Sylvester) en appliquant le théorème du rang à la restriction de g à $\mathrm{Im}f$.

Exercice 7 – Noyaux et images itérés

Soit $f \in L(E)$, E de dimension finie n.

a) Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$ et $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f$.

b) Montrer que $\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$.

c) Montrer que $\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Leftrightarrow E = \ker f \oplus \mathrm{Im}f$.

d) Illustrer avec f de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 – Rang d'une composée

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ linéaires, en dimension finie.

a) Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}g$ et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}f$.

b) Montrer que si g est injective, $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}f$, et que si f est surjective, $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}g$.

c) En déduire que le rang d'une matrice ne change pas quand on la multiplie à gauche ou à droite par une matrice inversible.

d) Exemple où l'inégalité est stricte des deux côtés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Une relation polynomiale donne l'inverse

Soit $f \in L(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id} = 0$.

a) Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison de f et de id.

b) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id})$ (écrire $x = (2x - f(x)) + (f(x) - x)$).

c) Montrer plus généralement que si $f^3 = \mathrm{id}$, f est bijective, et que si $f^2 = 0$, $\mathrm{id} - f$ est bijective d'inverse $\mathrm{id} + f$.

d) Application : la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie-t-elle $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$? En déduire A^{-1}.

Exercice 10 – Décalages sur les suites : la dimension infinie

Sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit $S(u) = (u_{n+1})_n$ (décalage à gauche) et $T(u) = (0, u_0, u_1, \ldots)$ (décalage à droite).

a) Montrer que S et T sont linéaires.

b) Déterminer $\ker S$, $\mathrm{Im} S$, $\ker T$, $\mathrm{Im} T$.

c) Calculer $S \circ T$ et $T \circ S$.

d) Quel résultat valable en dimension finie est ici mis en défaut ?

Exercice 11 – L'opérateur de primitivation

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $I : E \to E$, $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I est linéaire et injective.

b) Déterminer $\mathrm{Im} I$.

c) Soit $D : C^1([0,1]) \to E$, $g \mapsto g'$. Calculer $D \circ I$ et $I \circ D$. Commenter.

d) Montrer que I n'a pas de valeur propre : il n'existe ni $\lambda \in \mathbb{R}$ ni $f \neq 0$ tels que $I(f) = \lambda f$.

Exercice 12 – Prescrire noyau et image

Soit E de dimension n, et K, L deux sous-espaces.

a) Montrer qu'il existe $f \in L(E)$ tel que $\ker f = K$ et $\mathrm{Im} f = L$ si et seulement si $\dim K + \dim L = n$.

b) Dans $\mathbb{R}^3$, construire f avec $\ker f = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ et $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}$, et donner sa matrice.

c) Vérifier que l'application trouvée est un projecteur.

Exercice 13 – Hyperplan de R4 et formes qui l'annulent

Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y,z,t) = x + 2y - z + t$ et $H = \ker \varphi$.

a) Donner la dimension de H et une base.

b) Soit $F = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (1,0,0,1)$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = H \oplus F$ et décomposer $w = (1,1,1,1)$.

c) Déterminer toutes les formes linéaires ψ sur $\mathbb{R}^4$ qui s'annulent sur H.

d) Montrer que l'application p qui à w associe sa composante dans H est linéaire, et donner son expression.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Un endomorphisme de Mn(R) faisant intervenir la trace

Soit $n \geq 1$ et $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(M) = M + \mathrm{tr}(M) I_n$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Montrer que f est injective, et en déduire qu'elle est bijective.

c) Déterminer f^{-1} (calculer d'abord $\mathrm{tr} f(M)$).

d) Pour quelles valeurs de a l'application $g_a(M) = M + a\mathrm{tr}(M) I_n$ est-elle bijective ? Décrire $\ker g_a$ dans le cas contraire.

Exercice 15 – Synthèse : la différence seconde

Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$.

a) Calculer $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$, $u(X^3)$ et la matrice de u dans la base canonique.

b) Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$. Que remarque-t-on ?

c) En déduire $u^2 = 0$, et le vérifier sur la matrice.

d) Résoudre $u(P) = 6X + 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).