Plaquette 1 – Noyau, image, théorème du rang et matrices d'une application

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On vérifie la linéarité, on calcule **noyau** et **image**, on applique le **théorème du rang**, on écrit la **matrice** dans des bases données et on change de base.

Exercice 1 – Vérifier la linéarité

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) $f(x,y) = (2x+y,\ x-3y)$

b) $g(x,y) = (x+1,\ y)$

c) $h(x,y) = (xy,\ x)$

Exercice 2 – Noyau et image

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y)$. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Exercice 3 – Matrice d'une application

Écrire la matrice de $f(x,y,z) = (x+2y,\ y-z,\ x+z)$ dans les bases canoniques.

Exercice 4 – Théorème du rang

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ linéaire de rang 2. Déterminer $\dim \ker f$. L'application peut-elle être surjective ?

Exercice 5 – Endomorphisme et bijectivité

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x+y,\ 3x+2y)$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 6 – Projecteur

Soit $p(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2}\right)$.

a) Montrer que p est un projecteur.

b) Déterminer $\ker p$ et $\mathrm{Im} p$.

Exercice 7 – Symétrie

Soit $s(x,y) = (y,x)$. Montrer que s est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Application linéaire sur les polynômes

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$. Déterminer $\ker \varphi$, $\mathrm{Im}\varphi$ et le rang.

Exercice 9 – Composition

Soient $f(x, y) = (x + y,\ x - y)$ et $g(x, y) = (2x,\ 3y)$. Calculer les matrices de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 10 – Changement de base

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Écrire sa matrice dans la base $B' = ((1, 0), (-1, 1))$.

Exercice 11 – Formes linéaires et hyperplans

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z$. Déterminer $\ker \varphi$ et en donner une base.

Exercice 12 – La dérivation sur les polynômes

Soit $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'$ $(n \geq 1)$.

a) Montrer que D est linéaire et déterminer $\ker D$ et $\mathrm{Im}D$.

b) Vérifier le théorème du rang.

c) D est-elle injective ? surjective ? Et $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$?

d) Montrer que $D^{n+1} = 0$ et $D^n \neq 0$.

Exercice 13 – Image d'une famille libre, d'une famille génératrice

Soit $f : E \to F$ linéaire et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

a) Montrer que $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

b) Montrer que f est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.

c) Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_i))$ est une base de F.

d) Application : l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = (1, 1, 0)$, $f(e_2) = (0, 1, 1)$, $f(e_3) = (1, 0, 1)$ est-elle un isomorphisme ?

Exercice 14 – Évaluation en plusieurs points : un isomorphisme

Soient a_0, a_1, a_2 trois réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(a_0), P(a_1), P(a_2))$.

a) Montrer que φ est linéaire et injective.

b) En déduire que φ est un isomorphisme.

c) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques pour $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$.

d) Quelle est l'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 15 – Synthèse : noyau et image d'un endomorphisme

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Déterminer $\mathrm{rg} f$, $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.

b) Calculer A^2 et interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).