Plaquette 3 – Projecteurs, symétries et endomorphismes remarquables

Applications linéaires — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Un **projecteur** ($p^2 = p$) et une **symétrie** ($s^2 = \mathrm{id}$) sont entièrement décrits par **deux sous-espaces supplémentaires** : pour un projecteur, son image (où il vaut l'identité) et son noyau ; pour une symétrie, $\ker(s - \mathrm{id})$ et $\ker(s + \mathrm{id})$. Pour calculer $p(x)$, on **décompose** x selon la somme directe ; pour reconnaître un projecteur, on vérifie $p \circ p = p$. On étudie aussi les endomorphismes **nilpotents** (une puissance est nulle), les **homothéties** (qui envoient chaque vecteur sur un vecteur colinéaire) et les sous-espaces **stables**.

Exercice 1 – Projection sur un plan parallèlement à une droite

Dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $D = \mathrm{Vect}(d)$ avec $d = (1, 2, 3)$.

a) Justifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

b) Déterminer l'expression de la projection p sur P parallèlement à D, puis sa matrice A dans la base canonique.

c) Vérifier que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr} A = 2$.

d) En déduire la matrice de la symétrie s par rapport à P parallèlement à D, et calculer $s(1, 0, 0)$.

Exercice 2 – Un projecteur est une projection

Soit $p \in L(E)$ tel que $p \circ p = p$.

a) Montrer que $\mathrm{Im} p = \ker(p - \mathrm{id})$.

b) Montrer que $E = \ker p \oplus \mathrm{Im} p$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

c) Montrer que $q = \mathrm{id} - p$ est un projecteur et déterminer son noyau et son image.

d) Application : $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice d'un projecteur ? Préciser ses éléments.

Exercice 3 – Symétries : involutions

Soit $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}$ ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

a) Montrer que $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id})$ est un projecteur.

b) En déduire que $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$ et décrire s dans cette décomposition.

c) Montrer que s est bijective et donner s^{-1}.

d) Application : $s(x, y) = (y, x)$ dans $\mathbb{R}^2$. Préciser les deux sous-espaces et interpréter géométriquement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – La transposition et le changement de variable P(-X)

a) Montrer que $T : M \mapsto M^{\mathsf{T}}$ est une symétrie de $M_n(\mathbb{R})$ et identifier $\ker(T - \mathrm{id})$ et $\ker(T + \mathrm{id})$.

b) Écrire le projecteur associé sur les matrices symétriques, et calculer tr de ce projecteur (vu comme endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$).

c) Montrer que $\sigma : P \mapsto P(-X)$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$ et identifier ses deux sous-espaces.

d) Écrire la matrice de σ dans la base canonique et en déduire la dimension de chaque sous-espace pour $n = 5$.

Exercice 5 – Le reste de la division euclidienne est un projecteur

Soit $n \geq 2$, $B = X^2 - 1$ et $r : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par B.

a) Montrer que r est linéaire (utiliser l'unicité de la division euclidienne).

b) Montrer que r est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

c) Exprimer $r(P)$ à l'aide de $P(1)$ et $P(-1)$.

d) Calculer $r(X^n)$.

Exercice 6 – Somme de deux projecteurs

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace E.

a) Montrer que si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p + q$ est un projecteur.

b) Réciproquement, on suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0$, puis, en composant à gauche et à droite par p, que $p \circ q = q \circ p = 0$.

c) Dans ce cas, montrer que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

d) Exemple dans $\mathbb{R}^3$ avec deux projecteurs de rang 1 dont la somme est un projecteur de rang 2.

Exercice 7 – Composée de projecteurs qui commutent

Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

a) Montrer que $r = p \circ q$ est un projecteur.

b) Montrer que $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et $\ker r = \ker p + \ker q$.

c) Montrer que $p + q - p \circ q$ est un projecteur d'image $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

d) Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, p projection orthogonale sur le plan $z = 0$ et q projection orthogonale sur le plan $x = 0$. Déterminer $p \circ q$.

Exercice 8 – Trace d'un projecteur

Soit E de dimension n et p un projecteur de rang r.

a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de p est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) En déduire $\mathrm{tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Application : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier $A^2 = A$ et donner le rang sans calcul supplémentaire.

d) Une matrice M vérifiant $M^2 = M$ et $\mathrm{tr} M = 0$ est-elle forcément nulle ?

Exercice 9 – Endomorphismes nilpotents

Soit $f \in L(E)$, $\dim E = n$, nilpotent d'indice p : $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

a) Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

b) En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

c) Si $p = n$, écrire la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x), \ldots, f(x), x)$.

d) Montrer que $\mathrm{id} - f$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 10 – Quand chaque vecteur est envoyé sur un vecteur colinéaire

Soit $f \in L(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ soit liée.

a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

b) Soient x, y non nuls et non colinéaires. En calculant $f(x+y)$ de deux façons, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

c) Traiter le cas x, y colinéaires, et conclure que f est une homothétie.

d) Application : montrer que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec **tous** les endomorphismes sont les homothéties (on pourra utiliser les projections sur une droite $\mathrm{Vect}(x)$).

Exercice 11 – Sous-espaces stables et commutation

Soient $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que $\ker g$ et $\mathrm{Im} g$ sont stables par f.

b) En déduire que pour tout λ, $\ker(g - \lambda\,\mathrm{id})$ est stable par f.

c) Soit p un projecteur. Montrer que f commute avec p si et seulement si $\ker p$ et $\mathrm{Im} p$ sont stables par f.

d) Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer les endomorphismes qui commutent avec la projection $p(x, y) = (x, 0)$.

Exercice 12 – Le quart de tour n'a pas de droite stable

Soit $r \in L(\mathbb{R}^2)$ de matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Interpréter géométriquement r et calculer r^2.

b) Montrer qu'aucune droite de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par r.

c) Plus généralement, montrer que si $f \in L(\mathbb{R}^n)$ vérifie $f^2 = -\mathrm{id}$, alors n est pair.

d) Sur $\mathbb{C}^2$, l'endomorphisme de même matrice a-t-il des droites stables ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Projecteur de rang 1

Soit $a \in E$ et φ une forme linéaire sur E telles que $\varphi(a) = 1$. On pose $p(x) = \varphi(x)\,a$.

a) Montrer que p est un projecteur, et préciser son image et son noyau.

b) Dans $\mathbb{R}^n$, avec a vu comme une colonne C et $\varphi(x) = Lx$ pour une ligne L, montrer que la matrice de p est CL et que $LC = 1$.

c) Réciproquement, montrer que tout projecteur de rang 1 est de cette forme.

d) Application : écrire la matrice de la projection sur $\mathrm{Vect}(1,1,0)$ parallèlement au plan $x - 2y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14 – Affinités et dilatations

Soit $E = F \oplus G$, p la projection sur F parallèlement à G, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $f_\lambda = p + \lambda(\mathrm{id} - p)$ (**affinité** de base F, de direction G et de rapport λ).

a) Décrire f_λ sur la décomposition $x = y + z$ ($y \in F$, $z \in G$). Que sont f_0, f_1, f_{-1} ?

b) Montrer que $f_\lambda \circ f_\mu = f_{\lambda\mu}$. En déduire que f_λ est bijective si $\lambda \neq 0$ et donner son inverse.

c) Montrer que $f_\lambda^2 - (1+\lambda) f_\lambda + \lambda\,\mathrm{id} = 0$.

d) Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(1,1)$: écrire la matrice de f_2.

Exercice 15 – Synthèse : la symétrie P(X) donne P(1 - X)

Soit $s : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P(1 - X)$.

a) Montrer que s est une symétrie.

b) Écrire la matrice S de s dans la base canonique et vérifier $S^2 = I_3$.

c) Déterminer $\ker(s - \mathrm{id})$ et $\ker(s + \mathrm{id})$ (on pourra utiliser la base $(1, Y, Y^2)$ avec $Y = X - \frac{1}{2}$).

d) Écrire le projecteur p sur $\ker(s - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id})$, et calculer $p(X^2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).