Plaquette 2 – Divisibilité, division euclidienne et PGCD

Arithmétique dans Z — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

La **division euclidienne** $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ sert à tout : étudier les restes possibles, écrire un nombre en base b, et surtout calculer un PGCD, car $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a - qb)$. Pour un PGCD d'expressions en n, on **élimine** n par combinaisons jusqu'à une constante. Pour montrer que $d \mid N$, on combine **Gauss** (facteurs premiers entre eux) et une étude **par cas** des restes.

Exercice 1 – Restes des carrés

a) Effectuer la division euclidienne de -47 par 6.

b) Montrer que le reste de la division de n^2 par 4 vaut 0 ou 1 pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

c) En déduire qu'un entier de la forme $4k + 3$ n'est jamais la somme de deux carrés. Application : 2027.

d) Montrer que le carré d'un entier impair a pour reste 1 dans la division par 8.

Exercice 2 – Produits d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que 6 divise $n(n + 1)(n + 2)$.

b) En écrivant $2n + 1 = (n + 2) + (n - 1)$, en déduire que 6 divise $n(n + 1)(2n + 1)$. Quel résultat de sommation retrouve-t-on ?

c) Montrer que 24 divise le produit de quatre entiers consécutifs.

Exercice 3 – Homogénéité du PGCD

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ non tous deux nuls et $k \in \mathbb{N}^*$.

a) À l'aide d'une relation de Bézout, montrer que $\text{pgcd}(ka, kb) = k\,\text{pgcd}(a, b)$.

b) Application : calculer $\text{pgcd}(1500, 2100)$ sans algorithme.

c) Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation $12x = 18y$.

Exercice 4 – PGCD et PPCM imposés

On cherche les couples (a, b) d'entiers naturels, avec $a \leq b$, tels que $\text{pgcd}(a, b) = 6$ et $\text{ppcm}(a, b) = 180$.

a) Montrer que $ab = 1080$.

b) En posant $a = 6a'$, $b = 6b'$, se ramener à une condition sur (a', b').

c) Donner tous les couples solutions et en vérifier un.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Engrenages, bus et carrelage

a) Deux roues dentées de 24 et 36 dents engrènent. On marque une dent de chaque roue, en contact au départ. Au bout de combien de dents passées sont-elles de nouveau en contact ? Combien de tours a fait chaque roue ?

b) Trois lignes de bus partent d'une même gare toutes les 12, 18 et 30 minutes. Elles partent ensemble à 7 h. À quelle heure repartent-elles ensemble pour la première fois ?

c) On veut carreler une pièce rectangulaire de 360 cm sur 264 cm avec des carreaux carrés **entiers**, les plus grands possibles. Quelle est leur taille, et combien en faut-il ?

Exercice 6 – PGCD par élimination de n

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 35n + 57$, $b_n = 45n + 76$ et $d_n = \gcd(a_n, b_n)$.

a) Trouver des entiers α, β indépendants de n tels que $\alpha a_n + \beta b_n$ soit constant. En déduire les valeurs possibles de d_n.

b) Déterminer les n pour lesquels $d_n \neq 1$.

c) Vérifier pour $n = 19$ et pour $n = 1$.

Exercice 7 – Écriture en base b

a) Écrire 2026 en base 2 par divisions euclidiennes successives.

b) Écrire 2026 en base 16 (chiffres 0 à 9 puis $A = 10, \dots, F = 15$) et vérifier le résultat.

c) Soit $b \geq 2$ et $N = \sum_{k=0}^{m} c_k b^k$ son écriture en base b. Montrer que N et la somme $s = \sum c_k$ de ses chiffres ont le même reste dans la division par $b - 1$.

d) Application : reste de 2026 dans la division par 15, lu sur son écriture hexadécimale.

Exercice 8 – Divisibilité de a puissance n moins b puissance n

a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $a - b$ divise $a^n - b^n$.

b) En déduire que 7 divise $2^{3k} - 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $3 \mid 2^n + 1$ si et seulement si n est impair.

d) Montrer que si $n = rs$ avec $r, s \geq 1$, alors $2^r - 1$ divise $2^n - 1$. Que peut-on dire de n si $2^n - 1$ est premier ?

Exercice 9 – Nombres de Fibonacci et algorithme d'Euclide

On définit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Montrer par récurrence que $F_{n+1} \wedge F_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour $n \geq 2$, montrer que l'algorithme d'Euclide appliqué à (F_{n+1}, F_n) effectue exactement $n - 1$ divisions.

c) Appliquer à $(89, 55)$ et écrire les divisions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – PGCD de nombres de Mersenne

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b.

a) Montrer que $2^a - 1 = 2^r\left(2^{bq} - 1\right) + \left(2^r - 1\right)$, puis que $2^r - 1$ est le reste de la division de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

b) En déduire que $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$.

c) Calculer $\text{pgcd}(2^{12} - 1, 2^{18} - 1)$ et le vérifier en factorisant.

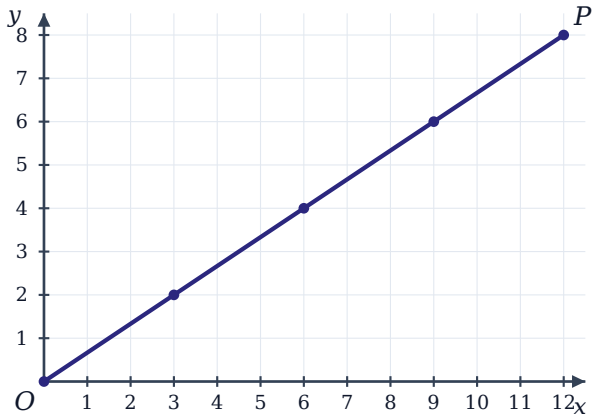
Exercice 11 – Points entiers sur un segment

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $d = a \wedge b$. On note S le segment du plan joignant $O(0,0)$ à $P(a,b)$.

a) Montrer qu'un point $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est sur S si et seulement si $bx = ay$ et $0 \le x \le a$.

b) En écrivant $a = da'$, $b = db'$, montrer que S contient exactement $d + 1$ points à coordonnées entières.

c) Combien S en contient-il pour $P(12, 8)$? Pour $P(2024, 1155)$?



Le segment de O à $P(12,8)$ traverse $\text{pgcd}(12,8) + 1 = 5$ nœuds du quadrillage.

Exercice 12 – Sous-groupes de Z

a) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On note n le plus petit élément strictement positif de H. Montrer, par une division euclidienne, que $H = n\mathbb{Z}$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv,\ u, v \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, puis que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$. Quel théorème retrouve-t-on ?

c) Montrer de même que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$.

Exercice 13 – Racines rationnelles d'un polynôme

Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ à coefficients entiers, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$.

a) Montrer que si $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible, $q > 0$) est racine de P, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

b) Trouver les racines rationnelles de $2X^3 - X^2 + 4X - 2$ et factoriser ce polynôme.

c) Montrer que $X^3 - 3X - 1$ n'a pas de racine rationnelle. En utilisant $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, en déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ est irrationnel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Nombres de Fermat

On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ ($F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, …).

a) Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$ pour tout $n \geq 1$.

b) En déduire que les F_n sont **deux à deux premiers entre eux**.

c) En déduire une nouvelle preuve de l'infinité des nombres premiers.

d) Vérifier a) pour $n = 4$. (Euler a montré que $F_5 = 641 \times 6700417$: les F_n ne sont pas tous premiers.)

Exercice 15 – Synthèse : une fraction toujours irréductible

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = n^3 + 2n$ et $B_n = n^4 + 3n^2 + 1$.

a) Écrire $B_n = n A_n + R_n$ avec R_n un polynôme en n de degré 2.

b) Poursuivre l'algorithme d'Euclide « polynomial » : écrire $A_n = n R_n + S_n$, puis R_n en fonction de S_n.

c) En déduire que $\operatorname{pgcd}(A_n, B_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Conclure que la fraction $\dfrac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$ est irréductible pour tout $n \geq 1$, et vérifier pour $n = 2$ et $n = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).