Plaquette 5 – Équations diophantiennes et problèmes

Arithmétique dans Z — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Trois outils résolvent la plupart des équations en entiers : **Bézout-Gauss** pour les équations linéaires $ax + by = c$; la **factorisation** ($x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, $(x - a)(y - b) = k$) qui ramène à une liste finie de diviseurs ; les **congruences** pour prouver qu'une équation n'a pas de solution (on réduit modulo 3, 4, 8 ou 9 et on compare les restes possibles). Pour une équation homogène, la **descente infinie** montre qu'il n'y a que la solution nulle.

Exercice 1 – Équation linéaire à deux inconnues

a) L'équation $12x + 18y = 31$ a-t-elle des solutions entières ?

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $12x + 18y = 30$.

c) Combien l'équation $12x + 18y = 300$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{N}^2$? Les décrire.

Exercice 2 – Le problème des cent volailles

Problème de Zhang Qiujian (Ve siècle) : un coq coûte 5 pièces, une poule 3 pièces, et trois poussins coûtent 1 pièce. On achète exactement 100 volailles pour exactement 100 pièces.

a) En notant c, p, q les nombres de coqs, poules et poussins, écrire le système vérifié.

b) Éliminer q pour obtenir une équation diophantienne en c et p, puis la résoudre dans $\mathbb{N}^2$.

c) Donner toutes les solutions du problème et en vérifier une.

Exercice 3 – Billets de 5 et 7 euros

Un distributeur ne délivre que des billets de 5 € et de 7 €.

a) De combien de façons peut-on obtenir exactement 100 € ?

b) Montrer que 23 € ne peut pas être obtenu, mais que tout montant entier $n \geq 24$ peut l'être (on pourra traiter $24, \ldots, 28$ puis ajouter des billets de 5 €).

c) Lister les montants impossibles. Vérifier qu'il y en a $\dfrac{(5-1)(7-1)}{2}$ et que le plus grand vaut $5 \times 7 - 5 - 7$.

Exercice 4 – Transvasements

On dispose d'un robinet, d'un évier et de deux bidons non gradués de 9 L et 4 L. On veut obtenir exactement 6 L dans le grand bidon.

a) Justifier par un argument arithmétique que les quantités obtenables sont liées à $9 \wedge 4$, et trouver $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $9u + 4v = 6$ avec u le plus petit possible en valeur absolue et $u > 0$.

b) Interpréter u et v en termes de remplissages et de vidages, et décrire une suite

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'opérations qui aboutit, en notant l'état (g, p) des deux bidons.

c) Avec des bidons de 6 L et 4 L, peut-on obtenir 3 L ?

Exercice 5 – Rectangles dont l'aire égale le périmètre

On cherche les rectangles de côtés entiers $x \leq y$ (en cm) dont l'aire (en cm²) est numériquement égale au périmètre (en cm).

a) Écrire l'équation, puis la mettre sous la forme $(x-a)(y-b) = k$.

b) Résoudre et décrire les rectangles obtenus.

c) Même question pour les rectangles dont l'aire est le **triple** du périmètre.

Exercice 6 – Somme de deux fractions unitaires

a) Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ (avec $x, y, n \in \mathbb{N}^*$) équivaut à $(x-n)(y-n) = n^2$ et que $x > n$, $y > n$.

b) En déduire que le nombre de couples (x, y) solutions vaut $\tau(n^2)$, nombre de diviseurs de n^2.

c) Résoudre pour $n = 6$ en listant les couples avec $x \leq y$.

d) Pour quels n l'équation a-t-elle une unique solution avec $x \leq y$?

Exercice 7 – Différence de deux carrés

a) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - y^2 = 45$.

b) Montrer qu'un entier $n \equiv 2 \pmod 4$ n'est jamais différence de deux carrés d'entiers.

c) Montrer que tout entier impair et tout multiple de 4 est une différence de deux carrés.

Exercice 8 – Triplets pythagoriciens

On cherche les triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $x^2 + y^2 = z^2$ et $x \wedge y = 1$ (**primitifs**).

a) Montrer que x et y sont de parités différentes (on pourra raisonner modulo 4). On suppose désormais y pair.

b) Montrer que $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ sont des entiers premiers entre eux dont le produit est $\left(\frac{y}{2}\right)^2$. En déduire qu'ils sont des carrés m^2 et n^2.

c) En déduire que $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$, et lister les triplets primitifs avec $z \leq 30$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

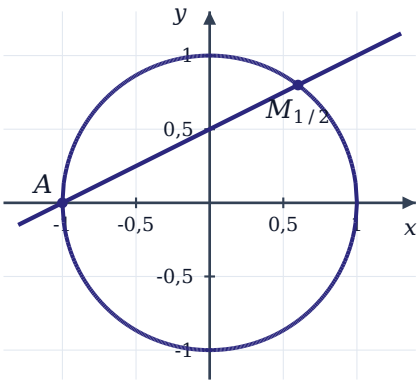
Exercice 9 – Points rationnels du cercle unité

Soit C le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et $A(-1, 0)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, la droite D_t passant par A de pente t recoupe C en un second point M_t.

a) Calculer les coordonnées de M_t.

b) Montrer que M_t est à coordonnées rationnelles si et seulement si $t \in \mathbb{Q}$ (pour la réciproque, exprimer t à partir de M).

c) Avec $t = \frac{n}{m}$, retrouver les triplets pythagoriciens. Calculer $M_{1/2}$ et $M_{2/3}$.



La droite de pente $\frac{1}{2}$ issue de $A(-1, 0)$ recoupe le cercle en $M\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Exercice 10 – Sommes de deux carrés

a) Vérifier l'**identité de Brahmagupta** : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

b) En déduire deux écritures de $65 = 5 \times 13$ comme somme de deux carrés.

c) Sachant que $1013 = 22^2 + 23^2$, écrire 2026 comme somme de deux carrés.

d) Montrer que 21 n'est pas somme de deux carrés, bien que $21 \not\equiv 3 \pmod 4$.

Exercice 11 – Sommes de trois cubes modulo 9

a) Montrer que le cube d'un entier est congru à 0, 1 ou -1 modulo 9 (on pourra écrire $x = 3k + r$).

b) En déduire les restes possibles de $x^3 + y^3 + z^3$ modulo 9.

c) L'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 2030$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}^3$? Et l'équation avec 2026, peut-on conclure de même ?

Exercice 12 – Descente infinie

On étudie l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ dans $\mathbb{Z}^3$.

a) Montrer que si (x, y, z) est solution, alors $3 \mid x$ et $3 \mid y$ (étudier les carrés modulo 3).

b) En déduire que $3 \mid z$ et que $\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$ est encore solution.

c) Conclure que $(0, 0, 0)$ est la seule solution. En déduire que le cercle $X^2 + Y^2 = 3$ n'a aucun point à coordonnées rationnelles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Puissances de 2 et de 3

On cherche les $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^x = 3^y + 1$.

a) Traiter le cas $y = 0$.

b) On suppose $y \geq 1$. En raisonnant modulo 3, montrer que x est pair, $x = 2k$.

c) Factoriser $2^{2k} - 1$ et en déduire que $2^k - 1$ et $2^k + 1$ sont des puissances de 3. Conclure.

d) Vérifier les solutions trouvées.

Exercice 14 – Équation de Pell-Fermat

On étudie $x^2 - 2y^2 = 1$ dans $\mathbb{N}^2$.

a) Vérifier que $(3, 2)$ est solution. Montrer que si (x, y) est solution, alors $(3x + 4y,\ 2x + 3y)$ aussi. (On pourra remarquer que $(x + y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = (3x + 4y) + (2x + 3y)\sqrt{2}$.)

b) En déduire une infinité de solutions ; donner les trois suivantes à partir de $(3, 2)$.

c) Montrer que pour ces solutions, $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2y^2}$. Quelle approximation de $\sqrt{2}$ obtient-on avec $(577, 408)$?

Exercice 15 – Synthèse : l'équation $y^2 = x^3 + 7$

On montre que l'équation $y^2 = x^3 + 7$ n'a **aucune** solution dans $\mathbb{Z}^2$ (V.-A. Lebesgue, 1869).

a) **Lemme.** Soit q premier avec $q \equiv 3 \pmod 4$. Montrer, avec le petit théorème de Fermat, que $y^2 \equiv -1 \pmod q$ n'a pas de solution.

b) Montrer que x est impair (sinon, étudier l'équation modulo 8), puis que $x \equiv 1 \pmod 4$ (étudier modulo 4).

c) Vérifier que $y^2 + 1 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ et montrer que $x^2 - 2x + 4 \equiv 3 \pmod 4$.

d) Conclure, en utilisant qu'un entier positif $\equiv 3 \pmod 4$ admet un facteur premier $\equiv 3 \pmod 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).