Plaquette 1 – PGCD, Bézout, congruences et théorème chinois

Arithmétique dans Z — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On calcule un PGCD par l'**algorithme d'Euclide**, on remonte l'algorithme pour obtenir une **relation de Bézout**, on résout des équations diophantiennes et des congruences, et on utilise **Fermat** pour les grandes puissances.

Exercice 1 – Algorithme d'Euclide

Calculer $\text{pgcd}(1071, 462)$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 2 – Relation de Bézout

Déterminer u et v entiers tels que $17u + 5v = 1$.

Exercice 3 – Équation diophantienne

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $7x + 11y = 1$.

Exercice 4 – Congruences et critère de divisibilité

Déterminer le reste de la division de 7^{100} par 5.

Exercice 5 – Petit théorème de Fermat

Calculer le reste de 3^{1000} modulo 7.

Exercice 6 – Divisibilité par récurrence

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est divisible par 3.

Exercice 7 – Théorème chinois

Résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$

Exercice 8 – PGCD et PPCM

Déterminer deux entiers naturels a et b tels que $a + b = 84$ et $\text{pgcd}(a, b) = 12$.

Exercice 9 – Nombres premiers entre eux

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{pgcd}(2n + 1,\ n + 1) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Infinité des nombres premiers

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers (raisonnement d'Euclide).

Exercice 11 – Congruences et dernier chiffre

Quel est le chiffre des unités de 2^{2026} ?

Exercice 12 – Euclide étendu en tableau

On note $a = 2024$ et $b = 1155$.

a) Calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$ par l'algorithme d'Euclide, en tenant à chaque ligne un couple (u_k, v_k) tel que $r_k = au_k + bv_k$.

b) En déduire un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = d$.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2024x + 1155y = 33$.

Exercice 13 – Somme et produit premiers entre eux

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\text{pgcd}(a, a + b) = \text{pgcd}(a, b)$.

b) On suppose $a \wedge b = 1$. Montrer que $ab \wedge (a + b) = 1$ (on pourra raisonner sur un diviseur premier commun).

c) En déduire que, si $a \wedge b = 1$, la fraction $\dfrac{a + b}{ab}$ est irréductible. Vérifier sur $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}$.

Exercice 14 – PGCD de deux expressions en n

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = \text{pgcd}(n^2 + 1,\ n + 2)$.

a) Effectuer la division euclidienne (en tant que polynômes) de $n^2 + 1$ par $n + 2$ et en déduire que $d_n = \text{pgcd}(n + 2, 5)$.

b) Quelles sont les valeurs possibles de d_n ?

c) Déterminer les n pour lesquels $d_n = 5$, et vérifier sur deux exemples.

Exercice 15 – Synthèse : équation modulaire

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $5x \equiv 3 \pmod{12}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).