Plaquette 3 – Coefficients binomiaux et formule du binôme

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Symétrie et Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$; **capitaine** : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

- **Binôme** : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ si $ab = ba$ (nombres, matrices qui commutent).
- **Valeurs particulières** : $x = 1$ donne $\sum \binom{n}{k} = 2^n$; $x = -1$ donne $\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ ($n \geq 1$) ; $x = i$ sépare les indices selon leur reste modulo 4.
- **Multinôme** : le coefficient de $a^p b^q c^r$ dans $(a+b+c)^n$ ($p+q+r=n$) est
$$\binom{n}{p,q,r} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$
- **Nombre premier** p : $p \mid \binom{p}{k}$ pour $0 < k < p$.

Correction de l'exercice 1 – Sommes lacunaires par les racines de l'unité

a) $2^n + 0 = 2\sum_k \binom{n}{2k}$: chaque somme vaut 2^{n-1}.

b) Pour $\omega \in \{1, i, -1, -i\}$, $\sum_\omega \omega^k = 4$ si $4 \mid k$, 0 sinon. Donc
$$\sum_k \binom{n}{4k} = \frac{1}{4}\sum_\omega (1+\omega)^n = \frac{1}{4}\left(2^n + (1+i)^n + 0 + (1-i)^n\right)$$

- et $(1-i)^n = \overline{(1+i)^n}$, d'où $2\mathrm{Re}(1+i)^n$.

c) $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^8 = (2i)^4 = 16$. Somme $\frac{256+32}{4} = 72$; directement $1 + 70 + 1 = 72$ ✓

d) $1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$, donc $\mathrm{Re}(1+i)^n = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$.

Réponse. $\sum \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$; $\sum \binom{n}{4k} = \frac{1}{4}(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4})$; $n = 8$: 72.

Correction de l'exercice 2 – Une somme de Vandermonde pondérée

a) Coefficient de x^n dans $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, avec $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

b) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, donc
$$\sum_k k\binom{n}{k}\binom{n}{k} = n\sum_k \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = n\binom{2n-1}{n-1}$$

- (Vandermonde : coefficient de x^{n-1} dans $(1+x)^{n-1}(1+x)^n$.)

c) $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ compte les comités de n personnes à k femmes ; le facteur k choisit une présidente parmi elles. Autrement : choisir d'abord la présidente (n façons), puis les $n-1$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

autres membres parmi les $2n-1$ personnes restantes.

d) $n=5$: $\sum k\binom{5}{k}^2 = 25+200+300+100+5 = 630$, et $5\binom{9}{4} = 5\times 126 = 630$ ✓

Réponse. $\sum k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$; 630 pour $n=5$.

Correction de l’exercice 3 – Binôme modulo un nombre premier

a) $p \mid k\binom{p}{k}$; comme $1 \le k < p$, p est premier avec k : par Gauss, $p \mid \binom{p}{k}$.

b) Dans le binôme, tous les termes $1 \le k \le p-1$ sont multiples de p :

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ [p]$$

c) $0^p = 0$ ✓ ; si $a^p \equiv a$, alors $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a+1$ $[p]$ par b).

d) $\binom{7}{k}$: $7, 21, 35, 35, 21, 7$, tous multiples de 7 ✓ Pour 6 : $\binom{6}{2} = 15$ n’est pas divisible par 6 (ni $\binom{6}{3} = 20$).

Réponse. $p \mid \binom{p}{k}$ par Gauss ; $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$; Fermat $a^p \equiv a$ $[p]$; faux pour 6 ($\binom{6}{2} = 15$).

Correction de l’exercice 4 – Le plus grand coefficient binomial

a) $\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \dfrac{k!(n-k)!}{n!} = \dfrac{n-k}{k+1}$.

b) $\dfrac{n-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < \dfrac{n-1}{2}$: les coefficients croissent strictement tant que $k < \dfrac{n-1}{2}$, puis décroissent ; le maximum est atteint en $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$).

c) $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des $2n+1$ coefficients de la ligne $2n$, dont la somme est 4^n :

$$(2n+1)\binom{2n}{n} \ge \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$$

d) $\binom{20}{10} = 184\,756$; $\dfrac{4^{10}}{21} \approx 49\,932$ et $4^{10} = 1\,048\,576$: l’encadrement est large (la vraie taille est $\approx \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \approx 187\,000$).

Réponse. Rapport $\dfrac{n-k}{k+1}$; maximum en $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $\dfrac{4^n}{2n+1} \le \binom{2n}{n} \le 4^n$.

Correction de l’exercice 5 – Partie entière de (2 + √3)^n

a) $x_n = \sum_k \binom{n}{k} 2^{n-k}\left((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k\right)$: les k impairs s’annulent, les k pairs donnent $2\binom{n}{k}2^{n-k}3^{k/2}$, entier pair.

b) $0 < 2-\sqrt{3} \approx 0{,}268 < 1$.

c) $(2+\sqrt{3})^n = x_n - (2-\sqrt{3})^n \in \,]x_n - 1, x_n[$:

$$\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor = x_n - 1, \qquad \{(2+\sqrt{3})^n\} = 1 - (2-\sqrt{3})^n \to 1$$

d) $x_1 = 4$, $x_2 = (7+4\sqrt{3}) + (7-4\sqrt{3}) = 14$, $x_3 = 52$ (récurrence $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$). $\lfloor 51{,}98 \rfloor = 51 = 52 - 1$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. x_n entier pair ; $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor = x_n - 1$; $x_1, x_2, x_3 = 4, 14, 52$.

Correction de l'exercice 6 – Binôme matriciel

a) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$.

b) I_3 commute avec toute matrice : $(I+N)^n = \sum \binom{n}{k} N^k$, et la somme s'arrête à $k = 2$.

c)

$$A^n = I + nN + \binom{n}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ (formule : $\frac{2 \times 1}{2} = 1$). Pour $n = -1$: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $AB = I_3$ (calcul direct, ou $(I+N)(I-N+N^2) = I + N^3 = I$) ✓

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, valable aussi pour $n = -1$.

Correction de l'exercice 7 – Différences finies et sommes alternées

a) $S_0 = (1-1)^n = 0$. $S_1 = \sum (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} = -n(1-1)^{n-1} = 0$ pour $n \geq 2$.

b) Soit $D = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$: $D^j(x^k) = k^j x^k$, donc $S_j = D^j\left[(1-x)^n\right](1)$. Or $D^j\left[(1-x)^n\right]$ est une combinaison de termes $x^m(1-x)^{n-m}$ avec $m \leq j$; pour $j < n$, chaque terme contient un facteur $(1-x)$, nul en $x = 1$.

c) Pour $j = n$, seul le terme $m = n$ survit : $D^n[(1-x)^n]$ contient $(-1)^n n!\, x^n$, d'où

$$S_n = (-1)^n n!$$

d) $n = 4$: par exemple $S_2 = 0 - 4 + 6 \times 4 - 4 \times 9 + 16 = 0$, et $S_4 = -4 + 6 \times 16 - 4 \times 81 + 256 = 24 = (-1)^4 4!$ ✓

Réponse. $\sum (-1)^k \binom{n}{k} k^j = 0$ pour $j < n$, et $(-1)^n n!$ pour $j = n$.

Correction de l'exercice 8 – Extraire un coefficient

a) $x^a x^{2b}$ avec $a + 2b = 5$, $a \leq 3$, $b \leq 4$: $(a,b) = (1,2)$ ou $(3,1)$:

$$\binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{3}\binom{4}{1} = 18 + 4 = 22$$

b) Terme général $\binom{9}{k} x^k x^{-(9-k)} = \binom{9}{k} x^{2k-9}$; $2k - 9 = 3$ donne $k = 6$: $\binom{9}{6} = 84$.

c) $\binom{6}{k} (2x)^k \left(-x^{-2}\right)^{6-k}$: exposant $k - 2(6-k) = 3k - 12 = 0$, $k = 4$: $\binom{6}{4} \times 2^4 \times (-1)^2 = 15 \times 16 = 240$.

d) $\binom{n}{k} x^{2k} x^{-(n-k)}$: exposant $3k - n = 0$ possible si et seulement si $3 \mid n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 22 ; b) 84 ; c) 240 ; d) n multiple de 3.

Correction de l’exercice 9 – Coefficients multinomiaux

a) $(a+(b+c))^n = \sum_p \binom{n}{p} a^p (b+c)^{n-p}$, puis $(b+c)^{n-p} = \sum_q \binom{n-p}{q} b^q c^{n-p-q}$:

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{q} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\cdot\frac{(n-p)!}{q!\,r!} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

b) $\frac{6!}{2!\,1!\,3!} = \frac{720}{12} = 60$.

c) Autant que de triplets (p,q,r) de somme n : $\binom{n+2}{2}$ (étoiles et barres) ; par exemple 10 pour $n=3$.

d) C’est le nombre de mots de 6 lettres contenant deux a, un b et trois c (anagrammes de $aabccc$) : 60.

Réponse. Coefficient $\frac{n!}{p!q!r!}$; 60 pour a^2bc^3 ; $\binom{n+2}{2}$ termes.

Correction de l’exercice 10 – Une identité de sous-ensembles emboîtés

a) $\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!}$ ✓ Combinatoirement : choisir A (k éléments) puis $B\subset A$ (j éléments), ou choisir B puis compléter A par $k-j$ éléments parmi les $n-j$ restants.

b)

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{j}\sum_{m=0}^{n-j}\binom{n-j}{m} = \binom{n}{j}2^{n-j}$$

c) On choisit B ($\binom{n}{j}$ façons), puis $A\setminus B$ est une partie quelconque des $n-j$ autres éléments (2^{n-j} façons).

d) $\binom{5}{2}\times 2^3 = 10\times 8 = 80$ ✓ (calcul direct : $10+30+30+10=80$).

Réponse. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$; $\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}2^{n-j}$; 80.

Correction de l’exercice 11 – Somme alternée avec 1/(k+1)

a) Voir la formule du capitaine appliquée à $n+1$: $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$.

b) $\sum_k \frac{(-1)^k}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j} = -\frac{1}{n+1}(0-1) = \frac{1}{n+1}$.

c) $\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ et, en développant,

$$\int_0^1 \sum_k (-1)^k\binom{n}{k}x^k\,\mathrm{d}x = \sum_k \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$$

d) $n=6$: $1-3+5-5+3-1+\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$ (calcul exact en fractions) ✓

Réponse. $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$ (binôme ou intégrale de $(1-x)^n$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Pascal modulo 2

a) $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \equiv 1 + x^2$; par récurrence,
$(1+x)^{2^{m+1}} = \left((1+x)^{2^m}\right)^2 \equiv (1+x^{2^m})^2 \equiv 1 + x^{2^{m+1}}$.

b) $(1+x)\sum_{k=0}^{2^m-1} x^k = 1 + 2(\dots) + x^{2^m} \equiv 1 + x^{2^m} \equiv (1+x)^{2^m} = (1+x)(1+x)^{2^m-1}$; on peut simplifier par $1+x$ (division euclidienne des polynômes modulo 2).

c) Les coefficients de $(1+x)^{2^m-1}$ sont donc tous congrus à 1 :

$$\binom{2^m-1}{k} \equiv 1 \ [2] \quad (0 \le k \le 2^m - 1)$$

— $m = 4$: la ligne 15 du triangle ne contient que des nombres impairs ($1, 15, 105, 455, 1365, \dots$) ✓

d) Par a), les coefficients de x^k, $0 < k < 2^m$, dans $(1+x)^{2^m}$ sont pairs.

Réponse. $(1+x)^{2^m} \equiv 1 + x^{2^m}$ [2] ; les $\binom{2^m-1}{k}$ sont tous impairs, les $\binom{2^m}{k}$ $(0 < k < 2^m)$ pairs.

Correction de l’exercice 13 – Somme binomiale trigonométrique

a) $\sum \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{ix})^k 1^{n-k} = (1 + \mathrm{e}^{ix})^n$.

b) $1 + \mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix/2}\left(\mathrm{e}^{-ix/2} + \mathrm{e}^{ix/2}\right) = 2\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{ix/2}$.

c)

$$(1 + \mathrm{e}^{ix})^n = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{e}^{inx/2}$$

— Partie réelle : la formule annoncée ; partie imaginaire : $\sum \binom{n}{k} \sin(kx) = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \sin\frac{nx}{2}$.

d) $(2\cos 0{,}35)^6 \cos 2{,}1 \approx (1{,}8787)^6 \times (-0{,}5048) \approx 43{,}98 \times (-0{,}5048) \approx -22{,}20$, et la somme directe donne $-22{,}2007$ ✓

Réponse. $\sum \binom{n}{k} \cos kx = (2\cos\frac{x}{2})^n \cos\frac{nx}{2}$, $\sum \binom{n}{k} \sin kx = (2\cos\frac{x}{2})^n \sin\frac{nx}{2}$.

Correction de l’exercice 14 – Sommes alternées partielles

a) Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, donc $(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}$: la somme télescope.

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

b) $1 - 7 + 21 - 35 = -20 = -\binom{6}{3}$ ✓

c) $m = n$: $(-1)^n\binom{n-1}{n} = 0$, on retrouve $\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

d) Le signe est $(-1)^m$ et la valeur absolue $\binom{n-1}{m}$, au plus le plus grand coefficient de la ligne $n-1$ (exercice 4).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\sum_{k \le m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$; $n = 7$, $m = 3$: -20.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : encadrer (1 + 1/n)^n

a) $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n}$.

b) Chaque facteur $1 - \frac{j}{n}$ croît avec n, et u_{n+1} a un terme de plus (positif) : $u_n \le u_{n+1}$. Les produits sont ≤ 1, et pour $k \ge 1$, $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$:

$$u_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k \ge 1} \frac{1}{2^{k-1}} = 3$$

— (inégalité stricte car $\frac{1}{3!} < \frac{1}{4}$).

c) $u_{100} \ge 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{99}{100} + \frac{1}{6} \cdot \frac{99 \times 98}{100^2} = 2 + 0{,}495 + 0{,}1617 = 2{,}6567$.

d) $2{,}6567 \le u_{100} \approx 2{,}7048 < \mathrm{e} \approx 2{,}7183$: la suite croissante majorée converge (vers e), lentement (écart $\approx \frac{\mathrm{e}}{2n} \approx 0{,}0136$).

Réponse. u_n croissante, $u_n < 3$; $u_{100} \ge 2{,}6567$; $u_{100} \approx 2{,}7048 < \mathrm{e}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).