Plaquette 4 – Inégalités : techniques et applications

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Carrés : $a^2+b^2 \geq 2ab$, avec égalité si et seulement si $a=b$.

— **Moyennes** $(a,b>0)$: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

— **Cauchy-Schwarz** :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

— avec égalité si et seulement si les suites (a_k) et (b_k) sont proportionnelles.

— **Inégalités de convexité** : $\mathrm{e}^x \geq 1+x$; $\ln(1+x) \leq x$ $(x>-1)$; $\sin x \leq x$ $(x \geq 0)$.

— **Triangulaire** : $||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$.

Correction de l'exercice 1 – Inégalités par des carrés

a) $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, égalité si et seulement si $a=b=c$.

b) $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, et c) donne ≥ 4 (égalité pour $x=y$).

c) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$.

d) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ par a) :

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

— (égalité pour $a=b=c$; c'est aussi Cauchy-Schwarz avec $(1,1,1)$).

Réponse. Tout se ramène à $\sum(a-b)^2 \geq 0$; égalités pour $a=b=c$, $x=y$.

Correction de l'exercice 2 – Démontrer Cauchy-Schwarz

a) $P(t) = \left(\sum a_k^2\right)t^2 + 2\left(\sum a_k b_k\right)t + \sum b_k^2$, somme de carrés : $P(t) \geq 0$ pour tout t, et le coefficient de t^2 est >0.

b) Un trinôme positif a un discriminant ≤ 0 :

$$4\left(\sum a_k b_k\right)^2 - 4\sum a_k^2 \sum b_k^2 \leq 0$$

c) Égalité $\Leftrightarrow$ discriminant nul $\Leftrightarrow$ P a une racine $t_0 \Leftrightarrow a_k t_0 + b_k = 0$ pour tout k : les suites sont proportionnelles.

d) Avec $\sqrt{a_k}$ et $\frac{1}{\sqrt{a_k}}$: $n^2 = \left(\sum \sqrt{a_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leq \sum a_k \sum \frac{1}{a_k}$ (égalité si tous les a_k sont égaux).

Réponse. Discriminant de $\sum(a_k t+b_k)^2$; égalité si proportionnelles ; $\sum \frac{1}{a_k} \geq \frac{n^2}{\sum a_k}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Les quatre moyennes

a) $A - G = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$.

b) $\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = \frac{1}{G}$ par a), d'où $H \leq G$.

c) $Q^2 - A^2 = \frac{2a^2+2b^2-(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$.

$$H \leq G \leq A \leq Q \quad (\text{égalités} \Leftrightarrow a = b)$$

d) $H = 1{,}6$, $G = 2$, $A = 2{,}5$, $Q \approx 2{,}92$ ✓ Un trajet aller à 1 km/min et retour à 4 km/min sur la même distance d dure $d + \frac{d}{4}$: vitesse moyenne $\frac{2d}{5d/4} = 1{,}6$ km/min $= H$ (et non A).

Réponse. $H \leq G \leq A \leq Q$; pour $(1, 4)$: $1{,}6 \leq 2 \leq 2{,}5 \leq 2{,}92$.

Correction de l'exercice 4 – Inégalités de convexité usuelles

a) $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, négative sur $\mathbb{R}_-$, positive sur $\mathbb{R}_+$: minimum $f(0) = 0$.

b) Avec $x \to \ln(1+x)$ dans a) : $1 + x \geq 1 + \ln(1+x)$.

c) $g(x) = x - \sin x$: $g' = 1 - \cos x \geq 0$, $g(0) = 0$, donc $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Puis $h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$: $h'(x) = x - \sin x \geq 0$ pour $x \geq 0$, $h(0) = 0$, et h est paire.

d) $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$ par b). Et b) appliqué à $x = -\frac{1}{n+1}$: $\ln\frac{n}{n+1} \leq -\frac{1}{n+1}$, soit $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 1$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Réponse. $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, $\ln(1+x) \leq x$, $\sin x \leq x$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$; encadrement de e.

Correction de l'exercice 5 – Encadrer n!

a) $n! = \prod k \leq \prod n = n^n$; $n! = 1 \times \prod_{k=2}^{n} k \geq 2^{n-1}$.

b) $k(n+1-k) - n = (k-1)(n-k) \geq 0$. En écrivant $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ (on associe k et $n+1-k$) :

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) \geq n^n$$

c) Le terme $k = n$ de la série de e^n est $\frac{n^n}{n!} \leq \mathrm{e}^n$.

d) $\sqrt{10^{10}} = 10^5 \leq 10!$ ✓ ; $\left(\frac{10}{\mathrm{e}}\right)^{10} \approx 4{,}54 \times 10^5 \leq 3{,}63 \times 10^6$ ✓ ; $10! \leq 10^{10}$ ✓ (la formule de Stirling donne $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$).

Réponse. $n^{n/2} \leq n! \leq n^n$ et $n! \geq (\frac{n}{\mathrm{e}})^n$; contrôle $n = 10$.

Correction de l'exercice 6 – Inégalité de Tchebychev (réarrangement)

a) $a_i - a_j$ et $b_i - b_j$ ont le même signe (suites de même sens) : chaque produit est ≥ 0.

b) En développant : $\sum_{i,j}(a_ib_i + a_jb_j - a_ib_j - a_jb_i) = 2n\sum a_kb_k - 2\sum a_i\sum b_j \geq 0$, d'où

$$n\sum_k a_kb_k \geq \left(\sum_k a_k\right)\left(\sum_k b_k\right)$$

c) Les produits deviennent ≤ 0 : l'inégalité s'inverse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $a_k = k$, $b_k = k^2$ croissantes : $\sum k^3 \geq \frac{1}{n}\sum k \sum k^2$. Pour $n = 3$: $36 \geq \frac{1}{3} \times 6 \times 14 = 28$ ✓

Réponse. Suites de même sens : $n\sum a_k b_k \geq \sum a_k \sum b_k$; $n = 3$: $36 \geq 28$.

Correction de l'exercice 7 – Majorer une série par télescopage

a) $k^2 \geq k(k-1) > 0$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n}$.

c) (S_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge vers $\ell \leq 2$; par d), $\ell \geq \frac{3}{2}$ (en fait $\ell = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$).

d) $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$:

$$S_n \geq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$$

— $n = 3$: $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = 1{,}25 \leq S_3 \approx 1{,}361 \leq 2 - \frac{1}{3} \approx 1{,}667$ ✓

Réponse. $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k \leq n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$; limite dans $[\frac{3}{2}, 2]$.

Correction de l'exercice 8 – Encadrer la série harmonique

a) $\ln \frac{k+1}{k} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ et $-\ln \frac{k}{k+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1}$.

b) On somme la majoration de $k = 1$ à n : $\ln(n+1) \leq H_n$. On somme la minoration de $k = 1$ à $n-1$: $H_n - 1 \leq \ln n$.

c) $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \to 1$ et $\frac{1 + \ln n}{\ln n} \to 1$:

$$H_n \sim \ln n$$

— $n = 10$: $2{,}398 \leq H_{10} \approx 2{,}929 \leq 3{,}303$ ✓

d) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} \leq 0$ par a) ; et $u_n \geq \ln(n+1) - \ln n > 0$ par b). Décroissante minorée : convergente.

Réponse. $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$; $H_n \sim \ln n$; $H_n - \ln n \to \gamma$.

Correction de l'exercice 9 – Optimiser avec l'inégalité arithmético-géométrique

a) Côtés x, y, $xy = A$: $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{A}$, égalité pour $x = y$: le **carré** (périmètre $4\sqrt{A}$).

b) Arêtes a, b, c, $abc = V$. Aire $2(ab + bc + ca) \geq 2 \times 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = 6\sqrt[3]{V^2}$, égalité pour $ab = bc = ca$, soit $a = b = c$.

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3$, égalité pour $\frac{x}{2} = \frac{4}{x^2}$, soit $x = 2$:

$$\min_{x>0}\left(x + \frac{4}{x^2}\right) = 3 \quad \text{atteint en } x = 2$$

d) $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$, nul en $x = 2$, négatif avant, positif après ; $f(2) = 2 + 1 = 3$ ✓

Réponse. Carré ; cube ; $\min(x + \frac{4}{x^2}) = 3$ en $x = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Produit de facteurs (1 + a_k)

a) $n = 1$: égalité. Si $P_n \geq 1 + S_n$, alors
$P_{n+1} = P_n(1 + a_{n+1}) \geq (1 + S_n)(1 + a_{n+1}) = 1 + S_{n+1} + S_n a_{n+1} \geq 1 + S_{n+1}$.

b) $1 + a_k \leq \mathrm{e}^{a_k}$ (exercice 4), produit de nombres positifs :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \leq \mathrm{e}^{a_1 + \cdots + a_n}$$

c) $\sum \frac{1}{k^2} \leq 2$ (exercice 7), donc le produit est $\leq \mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$; croissant et majoré, il converge (sa limite est $\frac{\sinh \pi}{\pi} \approx 3{,}68$).

d) $\prod \frac{k+1}{k} = n + 1 \to +\infty$, cohérent avec a) et $H_n \to +\infty$.

Réponse. $1 + \sum a_k \leq \prod (1 + a_k) \leq \mathrm{e}^{\sum a_k}$; $\prod (1 + \frac{1}{k^2}) \leq \mathrm{e}^2$; $\prod (1 + \frac{1}{k}) = n + 1$.

Correction de l’exercice 11 – Inéquations avec valeurs absolues

a) $x \leq 1$: $4 - 2x \leq 4$, $x \geq 0$. $1 \leq x \leq 3$: $2 \leq 4$ toujours. $x \geq 3$: $2x - 4 \leq 4$, $x \leq 4$. Solution $[0, 4]$.

b) Deux membres positifs : on compare les carrés,
$(2x-1)^2 < (x+2)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 < 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x-3) < 0$:

$$x \in \left]-\frac{1}{3}, 3\right[$$

c) $|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$, et de même en échangeant : $\pm(|a| - |b|) \leq |a-b|$. Égalité si et seulement si a et b ont le même signe (au sens large), c’est-à-dire $ab \geq 0$.

d) $|a-b| = |(a-x) + (x-b)| \leq |x-a| + |x-b|$; égalité si $a - x$ et $x - b$ ont le même signe, c’est-à-dire x entre a et b.

Réponse. a) $[0, 4]$; b) $]-\frac{1}{3}, 3[$; c) égalité si $ab \geq 0$; d) égalité pour x entre a et b.

Correction de l’exercice 12 – Somme des racines carrées

a) $g(t) = t^{3/2}$, $g'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t}$ croissante. Sur $[k-1, k]$: $g(k) - g(k-1) \leq \frac{3}{2}\sqrt{k}$; sur $[k, k+1]$: $g(k+1) - g(k) \geq \frac{3}{2}\sqrt{k}$.

b) On somme de $k = 1$ à n (télescopage) :

$$\frac{2}{3}n^{3/2} \leq S_n \leq \frac{2}{3}\left((n+1)^{3/2} - 1\right)$$

c) Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{2}{3}n^{3/2}$ (car $(n+1)^{3/2} \sim n^{3/2}$).

d) $\frac{2}{3} \times 1000 \approx 666{,}67 \leq 671{,}46 \leq \frac{2}{3}(1015{,}04 - 1) \approx 676{,}03$ ✓

Réponse. $\frac{2}{3}n^{3/2} \leq S_n \leq \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1)$; $S_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

Correction de l’exercice 13 – Inégalité de Nesbitt

a) $\frac{a}{s-a} = \frac{s-(s-a)}{s-a} = \frac{s}{s-a} - 1$; en sommant, $s\sum \frac{1}{s-a} - 3$.

b) $\sum \frac{1}{s-a} \geq \frac{9}{\sum (s-a)} = \frac{9}{2s}$.

c)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum \frac{a}{b+c} \geq s \cdot \frac{9}{2s} - 3 = \frac{3}{2}$$

— Égalité quand $s-a = s-b = s-c$, soit $a=b=c$.

d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} = 0{,}2 + 0{,}5 + 1 = 1{,}7 \geq 1{,}5$ ✓

Réponse. $\sum \frac{a}{b+c} = s\sum \frac{1}{s-a} - 3 \geq \frac{3}{2}$; égalité pour $a=b=c$.

Correction de l’exercice 14 – Une inégalité sur les sommes et les carrés

a) $\sum (x_k^2 - 2mx_k + m^2) = \sum x_k^2 - 2m \cdot nm + nm^2 = \sum x_k^2 - nm^2$.

b) Le membre de gauche de a) est ≥ 0 : $\sum x_k^2 \geq nm^2 = \frac{1}{n}\left(\sum x_k\right)^2$.

c) Chaque terme est majoré par la somme de tous (termes positifs) :

$$(x_j - m)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2$$

d) Écart type $\sigma = 2$: $\sum (x_k - m)^2 = n\sigma^2 = 4n$, donc $|x_j - 12| \leq 2\sqrt{n}$ pour toute note (borne atteignable seulement pour une répartition très déséquilibrée).

Réponse. $\sum (x_k - m)^2 = \sum x_k^2 - nm^2 \geq 0$; $|x_j - m| \leq \sigma\sqrt{n}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : l’inégalité arithmético-géométrique générale

a) $1 + t = \frac{x_k}{A} > 0$, donc $\ln \frac{x_k}{A} \leq \frac{x_k}{A} - 1$.

b) En sommant, $\sum \ln \frac{x_k}{A} \leq \frac{nA}{A} - n = 0$, soit $\ln \frac{\prod x_k}{A^n} \leq 0$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

c) Égalité si et seulement si chaque $\ln(1+t) = t$, soit $t = 0$: tous les x_k égaux à A.

d) Avec $x_k = 1 + \frac{1}{k}$: $A = 1 + \frac{H_n}{n}$ et $\prod x_k = n+1$. Pour $n=3$:
$G = 4^{1/3} \approx 1{,}587 \leq A = 1 + \frac{11/6}{3} \approx 1{,}611$ ✓

Réponse. $\ln \frac{x_k}{A} \leq \frac{x_k}{A} - 1$ sommé donne $G \leq A$; égalité si tous égaux ; $(n+1)^{1/n} \leq 1 + \frac{H_n}{n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).