Plaquette 1 – Sommes, produits, binôme et inégalités

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— **Sommes usuelles** :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

— **Somme géométrique** : pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

— **Télescopage** : $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

— **Binôme de Newton** : pour a, b qui commutent,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

— **Coefficients binomiaux** : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, avec $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et la relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

— **Factorisation** : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

— **Inégalité arithmético-géométrique** (deux termes) : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pour $a, b \geq 0$.

— **Changement d'indice** : on pose $j = k + p$ et l'on ajuste **les bornes**, sans oublier de réécrire le terme général.

Correction de l'exercice 1 – Sommes usuelles

a) $\frac{20 \times 21}{2} = 210$.

b) $\frac{10 \times 11 \times 21}{6} = \frac{2\,310}{6} = 385$.

c) On utilise la **linéarité** de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = 2\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n = n^2 + 4n$$

— Contrôle pour $n = 3$: $5 + 7 + 9 = 21$ et $9 + 12 = 21$. Correct.

— **Piège** : $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ (et non 1) : on compte les termes.

Réponse. a) 210 · b) 385 · c) $n^2 + 4n$.

Correction de l'exercice 2 – Somme géométrique

a) Formule du cours avec $q = 2$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$$

b) On se ramène à une somme partant de 0 en factorisant :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\sum_{k=3}^{10} 3^k = 3^3 \sum_{j=0}^{7} 3^j$ (changement d'indice $j = k-3$).

— $= 27 \times \dfrac{3^8 - 1}{2} = 27 \times \dfrac{6\,561 - 1}{2} = 27 \times 3\,280 = 88\,560$.

— Contrôle : $\sum_{k=0}^{10} 3^k = \dfrac{3^{11} - 1}{2} = 88\,573$ et $1 + 3 + 9 = 13$, or $88\,573 - 13 = 88\,560$. Cohérent.

Réponse. a) $2^{n+1} - 1$ · b) $88\,560$.

Correction de l'exercice 3 – Changement d'indice

On pose $j = k - 1$: quand k varie de 2 à $n+1$, j varie de 1 à n.

$$\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— **Méthode** : on modifie simultanément le **terme général** et les **bornes**. Une erreur sur les bornes est l'erreur la plus fréquente.

— Contrôle pour $n = 3$: à gauche $1 + 4 + 9 = 14$; à droite $\dfrac{3 \times 4 \times 7}{6} = 14$. Correct.

Réponse. $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction de l'exercice 4 – Télescopage

On décompose d'abord le terme général en éléments simples.

— $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ (vérification : $\dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$).

— La somme devient **télescopique** :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

— Contrôle pour $n = 3$: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{6+2+1}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$, et $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{3}{4}$. Correct.

— **Signature d'un télescopage** : un terme général qui s'écrit $a_k - a_{k+1}$.

Réponse. $\dfrac{n}{n+1}$.

Correction de l'exercice 5 – Coefficients binomiaux

— $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\,4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$.

— $\binom{10}{2} = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$.

— $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ (par symétrie).

— **Relation de Pascal** : $\binom{5}{2} = 10$ et $\binom{5}{3} = 10$, donc la somme vaut 20.

— Or $\binom{6}{3} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$. La relation est vérifiée.

Réponse. 35 ; 45 ; n ; et $10 + 10 = 20 = \binom{6}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Binôme de Newton

Formule du cours : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ici avec $a = x$, $b = 2$, $n = 4$.

— Coefficients de la ligne 4 du triangle de Pascal : 1, 4, 6, 4, 1.

$$(x+2)^4 = x^4 + 4x^3 \times 2 + 6x^2 \times 4 + 4x \times 8 + 16$$

— Soit $(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$.

— Contrôle pour $x = 1$: $3^4 = 81$ et $1 + 8 + 24 + 32 + 16 = 81$. Correct.

Réponse. $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$.

Correction de l’exercice 7 – Somme des coefficients binomiaux

a) On applique le binôme à $(1+1)^n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

— Interprétation combinatoire : c’est le nombre total de parties d’un ensemble à n éléments.

b) On applique le binôme à $(1-1)^n$:

— $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n = 0$ pour $n \geq 1$.

— Interprétation : il y a autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair.

— Contrôle pour $n = 3$: $1 - 3 + 3 - 1 = 0$. Correct.

Réponse. a) 2^n · b) 0 (pour $n \geq 1$).

Correction de l’exercice 8 – Factorisation de a^n − b^n

a) Formule du cours avec $n = 3$:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

b) Pour $n = 6$ et $d = 3$: on pose $A = 2^3 = 8$, de sorte que $2^6 = A^2$.

— $2^6 - 1 = A^2 - 1 = (A-1)(A+1) = 7 \times 9 = 63$.

— Le facteur $A - 1 = 2^3 - 1 = 7$ divise donc bien 63.

— **Principe général** : si $n = dm$, alors $2^n - 1 = \left(2^d\right)^m - 1$ est divisible par $2^d - 1$ d’après la factorisation de $A^m - 1$.

Réponse. a) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$ · b) $2^6 - 1 = 63 = 7 \times 9$, divisible par $2^3 - 1 = 7$.

Correction de l’exercice 9 – Somme double

On calcule d’abord la somme **intérieure** (à i fixé).

— $\sum_{j=1}^{4} (i + j) = 4i + \sum_{j=1}^{4} j = 4i + 10$.

— Puis la somme extérieure :

$$\sum_{i=1}^{3} (4i + 10) = 4 \times \frac{3 \times 4}{2} + 3 \times 10 = 24 + 30 = 54$$

— **Contrôle direct** : les douze termes sont $2, 3, 4, 5$; $3, 4, 5, 6$; $4, 5, 6, 7$, de sommes $14 + 18 + 22 = 54$. Correct.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Méthode** : dans une somme double, on traite l'indice intérieur en considérant l'autre comme une constante.

Réponse. 54.

Correction de l'exercice 10 – Produits

a) $\prod_{k=1}^{5} k = 5! = 120$.

b) Le produit est **télescopique** :

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

— Justification : chaque numérateur se simplifie avec le dénominateur du facteur précédent ; il ne reste que le premier numérateur (1) et le dernier dénominateur (n).

— Contrôle pour $n = 4$: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Correct.

Réponse. a) 120 · b) $\frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 11 – Inégalité arithmético-géométrique

a) On part de l'identité $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ (un carré est positif).

— En développant : $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, donc $2\sqrt{ab} \leq a + b$, d'où $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

— L'égalité a lieu si et seulement si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, c'est-à-dire $a = b$.

b) On applique l'inégalité avec $a = x$ et $b = \frac{1}{x}$ (tous deux positifs) :

— $\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 1 \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}$, donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

— L'égalité n'a lieu que pour $x = \frac{1}{x}$, soit $x = 1$.

Réponse. a) issue de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ · b) $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité en $x = 1$.

Correction de l'exercice 12 – Inégalité de Bernoulli

Initialisation ($n = 0$) : $(1 + x)^0 = 1$ et $1 + 0 = 1$: l'inégalité est vraie (avec égalité).

Hérédité : supposons $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour un n donné.

— Comme $x \geq -1$, le facteur $1 + x$ est **positif ou nul** : on peut multiplier l'inégalité par $1 + x$ sans changer son sens.

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2$$

— Or $nx^2 \geq 0$, donc $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$.

Conclusion : l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— **Point clé de rédaction** : l'hypothèse $x \geq -1$ sert exactement à garantir la positivité de $1 + x$ lors de la multiplication.

Réponse. Récurrence : $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$.

Correction de l'exercice 13 – Sommes doubles triangulaires

a) À j fixé, $\sum_{i=1}^{j} i = \frac{j(j+1)}{2}$, puis

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2+j) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

b) À i fixé, j varie de i à n : $n-i+1$ termes égaux à i.
$\sum i(n+1) - \sum i^2 = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(3n+3-2n-1)}{6}$, même résultat ✓

c) Le carré d'une somme contient les carrés et deux fois chaque produit croisé :

— $2T = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, soit $T = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$.

d) $n=3$: $S = 1+(1+2)+(1+2+3) = 10 = \frac{3\times4\times5}{6}$ ✓ ;
$T = 1\cdot2 + 1\cdot3 + 2\cdot3 = 11 = \frac{3\times4\times2\times11}{24}$ ✓

Réponse. $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$; $T = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$; $n=3$: 10 et 11.

Correction de l'exercice 14 – Sommes pondérées de coefficients binomiaux

a) $k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$.

c) $\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$ ✓ Donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

— (on retire le terme $j=0$ de $\sum_j\binom{n+1}{j} = 2^{n+1}$).

d) $n=5$: $5+20+30+20+5 = 80 = 5\times2^4$ ✓ ; $1+\frac{5}{2}+\frac{10}{3}+\frac{10}{4}+1+\frac{1}{6} = 10{,}5 = \frac{63}{6}$ ✓

Réponse. $\sum k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$; $\sum\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; $n=5$: 80 et 10,5.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : somme des cubes

a) - Calcul direct : $1+8+27+64 = 100$.

— Formule : $\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2 = 10^2 = 100$. Les deux coïncident.

b) Pour $n=5$:

— Somme des cubes : $1+8+27+64+125 = 225$.

— Somme des entiers : $\frac{5\times6}{2} = 15$, et $15^2 = 225$.

— L'identité est vérifiée : la somme des n premiers cubes est le **carré** de la somme des n premiers entiers.

— Cette identité se démontre par récurrence, en utilisant $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Réponse. a) 100 dans les deux cas · b) $225 = 15^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).