Plaquette 2 – Sommes et produits : techniques de calcul

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Télescopage : $\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_p$; $\prod_{k=p}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_{n+1}}{a_p}$.

— **Dérivée d'une somme géométrique** : pour $q\neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}=\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

— **Interversion** : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_{ij}$ (domaine $1\le i\le j\le n$).

— **Sommes trigonométriques** : $\sum\cos(kx)=\mathrm{Re}\sum \mathrm{e}^{ikx}$, puis factorisation par l'angle moitié : $\mathrm{e}^{ia}-1=2i\sin\frac{a}{2}\mathrm{e}^{ia/2}$.

— **Décomposition en éléments simples** : $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$; $\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Correction de l'exercice 1 – Somme arithmético-géométrique

a) $S_n(q)=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; en dérivant (quotient) :

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}=\frac{-(n+1)q^n(1-q)+(1-q^{n+1})}{(1-q)^2}=\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

b) Directement : $1+2\times 2+3\times 4=17$; formule : $\frac{1-4\times 8+3\times 16}{1}=17$ ✓

c) $\sum_{k=0}^{n}k2^k=2\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}=2(1-(n+1)2^n+n2^{n+1})=(n-1)2^{n+1}+2$. Contrôle $n=3$: $0+2+8+24=34=2\times 16+2$ ✓

d) $q^n\to 0$ et $nq^n\to 0$ (croissances comparées) : la limite est $\frac{1}{(1-q)^2}$ (utilisée pour l'espérance de la loi géométrique).

Réponse. $\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}=\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$; $\sum k2^k=(n-1)2^{n+1}+2$; limite $\frac{1}{(1-q)^2}$.

Correction de l'exercice 2 – Télescopage d'ordre 2

a) Au même dénominateur : $\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ ✓

b) Avec $a_k=\frac{1}{k(k+1)}$, la somme vaut $\frac{1}{2}\sum(a_k-a_{k+1})$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

c) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\times 6\times 7}=\frac{1}{4}-\frac{1}{84}=\frac{21-1}{84}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$ ✓

d) Limite $\frac{1}{4}$. En général, $\frac{p}{k\cdots(k+p)}=\frac{1}{k\cdots(k+p-1)}-\frac{1}{(k+1)\cdots(k+p)}$, et $\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}=\frac{1}{p\cdot p!}$ ($p=2$: $\frac{1}{4}$ ✓).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \to \frac{1}{4}$; en général $\frac{1}{p \cdot p!}$.

Correction de l'exercice 3 – Télescopages logarithmiques et produits

a) $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$: les deux produits télescopent,

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

b) $\ln \frac{n+1}{2n} \to \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Contrôle $n = 5$: $\ln \frac{6}{10} \approx -0{,}511$ (calcul direct identique).

c) Le produit vaut $\prod 2k = 2^n n!$. Et $\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{\prod 2k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ (on complète la factorielle par les pairs).

d) $(1-x)(1+x) = 1 - x^2$, puis $(1-x^2)(1+x^2) = 1 - x^4$, etc. :

— $\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}$. Contrôle numérique ($x = 0{,}3$, $n = 4$) : 1,428 571 42 des deux côtés ✓

Réponse. $\prod (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$; somme des $\ln \to -\ln 2$; $\prod (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$; $\prod (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}$.

Correction de l'exercice 4 – Interversion de sommes

a) Domaine $1 \le k \le j \le n$; à j fixé, k prend j valeurs :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{1}{j} = n$$

b) Le nombre de couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $\min(i,j) = k$ est $2(n-k)+1$. Donc $\sum_k k(2n - 2k + 1) = (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j \le k} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} = (n+1)H_n - n$.

d) a) : 4 ✓ ; b) : $\frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30$, et la somme des coefficients de la matrice $(\min(i,j))$ de taille 4 vaut $1 \times 7 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 4 \times 1 = 30$ ✓

Réponse. a) n ; b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; c) $\sum H_k = (n+1)H_n - n$.

Correction de l'exercice 5 – Sommes de puissances par télescopage

a) Le membre de gauche télescope en $(n+1)^3 - 1$:

$$3\sum k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) $(n+1)^4 - 1 = 4\sum k^3 + 6\sum k^2 + 4\sum k + n$; en remplaçant, $\sum k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

c) $(n+1)^{p+1} - 1 = (p+1)\sum k^p + \sum_{j<p} \binom{p+1}{j} \sum k^j$; par hypothèse, les $\sum k^j$ ($j < p$) sont des polynômes de degré $\le p$, donc $\sum k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + (\text{degré} \le p)$.

d) $\frac{5 \times 6 \times 11 \times 89}{30} = 979$, et directement $1 + 16 + 81 + 256 + 625 = 979$ ✓

Réponse. Télescopage de $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$; $\sum k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$; $\sum_{k \le 5} k^4 = 979$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Somme des cosinus

a) $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1}$ ($\mathrm{e}^{ix} \neq 1$).

b) $\mathrm{e}^{ia} - 1 = \mathrm{e}^{ia/2} \cdot 2i \sin\frac{a}{2}$, d’où

$$C_n + iS_n = \mathrm{e}^{inx/2} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

— La partie réelle donne la formule annoncée.

c) Partie imaginaire : $S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

d) $\frac{\sin 1 \times \cos 0{,}75}{\sin 0{,}25} = \frac{0{,}84147 \times 0{,}73169}{0{,}24740} \approx 2{,}48862$, et
$1 + \cos 0{,}5 + \cos 1 + \cos 1{,}5 \approx 1 + 0{,}87758 + 0{,}54030 + 0{,}07074 = 2{,}48862$ ✓

Réponse. $C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Correction de l’exercice 7 – Factorielles télescopiques

a) $(k+1)! - k! = k!\,(k+1-1) = k \cdot k!$. Télescopage : $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

b) $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$ ✓ Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

c) $k! + (k+1)! + (k+2)! = k!\,(1 + (k+1) + (k+1)(k+2)) = k!\,(k+2)^2$. Le terme vaut $\frac{1}{k!\,(k+2)} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$ (même calcul qu’en b)). Somme : $1 - \frac{1}{(n+2)!}$.

d) $1 + 4 + 18 + 96 + 600 = 719 = 6! - 1$ ✓

Réponse. $\sum k \cdot k! = (n+1)! - 1$; $\sum \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; c) $1 - \frac{1}{(n+2)!}$.

Correction de l’exercice 8 – Parties entières

a) $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m \Leftrightarrow m^2 \leq k < (m+1)^2$: $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$ entiers.

b) Pour $k < n^2$, m va de 1 à $n - 1$:

$$\sum_{m=1}^{n-1} m(2m+1) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(4n+1)}{6}$$

c) $k = 1, \ldots, 8$: $1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2$, somme 13 ; formule $\frac{2 \times 3 \times 13}{6} = 13$ ✓

d) $\lfloor \log_2 k \rfloor = m \Leftrightarrow 2^m \leq k < 2^{m+1}$: 2^m entiers. Somme $\sum_{m=0}^{n-1} m2^m = (n-2)2^n + 2$ (exercice 1). Contrôle $n = 3$: $k = 1..7$: $0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 = 1 \times 8 + 2$ ✓

Réponse. $2m + 1$ entiers ; $\sum \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \frac{(n-1)n(4n+1)}{6}$; $\sum \lfloor \log_2 k \rfloor = (n-2)2^n + 2$.

Correction de l’exercice 9 – Conjugués et télescopage

a) $(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = (k+1) - k = 1$.

b) Télescopage : $\sqrt{n+1} - 1$; pour $n = 8$, $\sqrt{9} - 1 = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$, et $2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}<2\sqrt{k+1}$.

d) Pour la minoration, on somme $\dfrac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ de 1 à n : $>2(\sqrt{n+1}-1)$. Pour la majoration, $\dfrac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$ pour $k\geq 2$, et on ajoute le terme $k=1$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2(\sqrt{n}-1)=2\sqrt{n}-1$$

— Les deux bornes sont équivalentes à $2\sqrt{n}$: $\sum_{k\leq n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\sim 2\sqrt{n}$.

Réponse. $\sum\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{n+1}-1$; $\sum_{k\leq n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\sim 2\sqrt{n}$.

Correction de l’exercice 10 – Une somme d’arctangentes

a) $\theta=\arctan a-\arctan b\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ (différence de deux angles de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$), et

$$\tan\theta=\frac{a-b}{1+ab}$$

— d’où $\theta=\arctan\dfrac{a-b}{1+ab}$.

b) Avec $a=k+1$, $b=k$: $\dfrac{1}{1+k(k+1)}=\dfrac{1}{k^2+k+1}$ ✓

c) Télescopage : $\arctan(n+1)-\arctan 0=\arctan(n+1)\to\frac{\pi}{2}$.

d) $\arctan 2-\frac{\pi}{4}\approx 1{,}10715-0{,}78540=0{,}32175$ et $\arctan\frac{1}{3}\approx 0{,}32175$ ✓

Réponse. $\sum_{k=0}^{n}\arctan\dfrac{1}{k^2+k+1}=\arctan(n+1)\to\frac{\pi}{2}$.

Correction de l’exercice 11 – Produits de termes consécutifs

a) $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=k(k+1)\cdot 3$ ✓ ; télescopage : $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-0$.

b) Même identité : $k\cdots(k+p)-(k-1)k\cdots(k+p-1)=(p+1)\,k\cdots(k+p-1)$, d’où

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+p-1)=\frac{n(n+1)\cdots(n+p)}{p+1}$$

c) $\sum k^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ✓

d) On divise b) par $p!$: $\dfrac{k\cdots(k+p-1)}{p!}=\binom{k+p-1}{p}$ et $\dfrac{n\cdots(n+p)}{(p+1)!}=\binom{n+p}{p+1}$: c’est exactement la crosse de hockey.

Réponse. $\sum k(k+1)\cdots(k+p-1)=\dfrac{n\cdots(n+p)}{p+1}$; équivalent à la crosse de hockey.

Correction de l’exercice 12 – Somme géométrique double

a) Sur i d’abord : $\sum_{j=0}^{n}(j+1)q^j$. Sur j d’abord : $\sum_{i=0}^{n}\dfrac{q^i-q^{n+1}}{1-q}$. Les deux sont égales.

b) $\sum_{i=0}^{n}\dfrac{q^i-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}-(n+1)q^{n+1}\right)$, qui redonne la formule de l’exercice 1.

c) $\sum_i\sum_j q^iq^j=\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)^2\to\dfrac{1}{(1-q)^2}$. Pour le max : $\max(i,j)=m$ pour $2m+1$ couples, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum_{m\ge 0}(2m+1)q^m=\frac{2q}{(1-q)^2}+\frac{1}{1-q}=\frac{1+q}{(1-q)^2}$$

d) $q=\frac12$: 4 et $\frac{3/2}{1/4}=6$.

Réponse. Interversion sur $0\le i\le j\le n$; limites $\frac{1}{(1-q)^2}$ et $\frac{1+q}{(1-q)^2}$ (4 et 6 pour $q=\frac12$).

Correction de l’exercice 13 – Produits et doubles factorielles

a) $W_n=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}=\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

b) $\frac{2k-1}{2k}\le\frac{2k}{2k+1}$ (car $(2k-1)(2k+1)=4k^2-1\le 4k^2$), donc $W_n\le V_n$, et

$$W_nV_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{1}{2n+1}\quad\Longrightarrow\quad W_n^2\le W_nV_n=\frac{1}{2n+1}$$

c) $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}\le\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

d) $\binom{10}{5}=252$ et $\frac{1024}{\sqrt{11}}\approx 308{,}7$ ✓ (en fait $\binom{2n}{n}\sim\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, soit ≈ 258 pour $n=5$).

Réponse. $W_n=\binom{2n}{n}4^{-n}$; $W_n^2\le\frac{1}{2n+1}$; $\binom{2n}{n}\le\frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$.

Correction de l’exercice 14 – Somme de termes en k·x^k complexe

a) $z^n=\mathrm{e}^{2i\pi}=1$ et $z\neq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}=0$.

b) Parties réelle et imaginaire : les deux sommes sont nulles (les racines n-ièmes de l’unité ont pour barycentre O).

c) $\sum_{k=1}^{n-1}k\omega^{k-1}=\dfrac{1-n\omega^{n-1}+(n-1)\omega^n}{(1-\omega)^2}$ avec $\omega^n=1$, $\omega^{n-1}=\omega^{-1}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}k\omega^k=\omega\cdot\frac{n-n\omega^{-1}}{(1-\omega)^2}=\frac{n(\omega-1)}{(1-\omega)^2}=\frac{n}{\omega-1}$$

d) $n=4$, $\omega=i$: $0+i+2(-1)+3(-i)=-2-2i$; formule : $\frac{4}{i-1}=\frac{4(-1-i)}{2}=-2-2i$ ✓

Réponse. $\sum\omega^k=0$; $\sum\cos=\sum\sin=0$; $\sum k\omega^k=\frac{n}{\omega-1}$ ($-2-2i$ pour $n=4$).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : sommes de Riemann exactes

a) $R_n=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\to\frac13=\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x$.

b) Avec $q=\mathrm{e}^{1/n}$: $\frac1n\cdot\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{1/n}-1}$. Or $n(\mathrm{e}^{1/n}-1)\to 1$ (dérivée de exp en 0), donc

$$\frac1n\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{k/n}=\frac{\mathrm{e}-1}{n(\mathrm{e}^{1/n}-1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}-1$$

c) $\frac1n\cdot\frac{1}{1+k/n}=\frac{1}{n+k}$, somme $\sum_{j=n+1}^{2n}\frac1j=H_{2n}-H_n=\ln 2n-\ln n+o(1)\to\ln 2=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

d) $R_n-\frac13=\frac{2n^2+3n+1-2n^2}{6n^2}=\frac{3n+1}{6n^2}\sim\frac{1}{2n}$: erreur d’ordre $\frac1n$, typique des rectangles.

Réponse. $R_n=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\to\frac13$ (erreur $\sim\frac{1}{2n}$) ; $\to\mathrm{e}-1$; $H_{2n}-H_n\to\ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).