Plaquette 5 – Problèmes de synthèse en calcul algébrique

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Racines de l'unité $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$: $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = n$ si $n \mid p$, 0 sinon, et

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$$

— **Moivre** : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, à développer par le binôme.

— **Coefficient d'un produit** : $[x^m]P(x)Q(x) = \sum_k [x^k]P \cdot [x^{m-k}]Q$.

— **Factorisations utiles** : $k^4 + k^2 + 1 = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)$; $|1 - \mathrm{e}^{i\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$.

Correction de l'exercice 1 – La série des k/2^k

a) $S_n = \frac{1}{2}\sum k q^{k-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-(n+1)2^{-n}+n2^{-n-1}}{1/4} = 2\left(1 - \frac{2n+2-n}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

b) $n=1$: $\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$ ✓ Hérédité :

$$2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} = \frac{57}{32}$ et $2 - \frac{7}{32} = \frac{57}{32}$ ✓

d) $S_n \to 2$: c'est l'espérance $\sum k\,\mathbb{P}(X=k)$ d'une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, où $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^k}$: en moyenne 2 lancers.

Réponse. $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \to 2$; $S_5 = \frac{57}{32}$.

Correction de l'exercice 2 – Un télescopage caché

a) $(k^2+1)^2 - k^2 = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)$.

b) $\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1} = \frac{2k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$ ✓

c) Avec $a_k = \frac{1}{k^2-k+1}$, on a $\frac{1}{k^2+k+1} = a_{k+1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}(a_1 - a_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

d) $n=3$: $\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} = \frac{6}{13}$ et $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{13}\right) = \frac{6}{13}$ ✓ Limite $\frac{1}{2}$.

Réponse. $\sum \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right) \to \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Formules de Moivre et binôme

a) $(c+is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \qquad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

b) $\sin^2 = 1 - \cos^2$: $c^3 - 3c(1-c^2) = 4c^3 - 3c$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Partie réelle de $(c+is)^4$: $c^4 - 6c^2s^2 + s^4 = c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 = 8c^4 - 8c^2 + 1$.

d) $\cos\frac{3\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc avec $x = \cos\frac{\pi}{9}$: $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$, soit $8x^3 - 6x - 1 = 0$ (contrôle : $\cos\frac{\pi}{9} \approx 0{,}9397$, $8 \times 0{,}8298 - 5{,}638 - 1 \approx 0$ ✓).

Réponse. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$; $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$; $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Correction de l’exercice 4 – Produit des sinus

a) $X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega_k)$ et $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$; on simplifie par $X - 1$ (polynômes).

b) On évalue en $X = 1$: $\prod(1 - \omega_k) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$.

c) $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\theta/2}$, de module $2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$; avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, $\sin\frac{k\pi}{n} > 0$.

d) En prenant les modules dans b) :

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = n \quad\Longrightarrow\quad \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

— $n = 3$: $\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}$ ✓ ; $n = 6$: $\frac{6}{32} = 0{,}1875$ (calcul numérique identique) ✓

Réponse. $\prod(1 - \omega_k) = n$, $|1 - \omega_k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$, donc $\prod\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Correction de l’exercice 5 – Somme des carrés de sinus

a) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

b) C’est la partie réelle de $\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2ik\pi/n} = 0$: la somme vaut 0.

c) Le terme $k = 0$ est nul, donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1 - \cos\frac{2k\pi}{n}}{2} = \frac{n}{2} - 0$$

d) $n = 7$: 3,5 (calcul numérique ✓). La moyenne de $\sin^2$ sur n points régulièrement répartis sur une période vaut $\frac{1}{2}$, comme la valeur moyenne de $\sin^2$ sur $[0, \pi]$.

Réponse. $\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2}$.

Correction de l’exercice 6 – Somme double des distances

a) Termes diagonaux nuls ; $|i-j|$ est symétrique en (i,j).

b) Pour d fixé, il y a $n - d$ couples $(i, i+d)$.

c)

$$2\sum_{d=1}^{n-1}(nd - d^2) = n^2(n-1) - \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} = \frac{(n-1)n(3n-2n+1)}{3} = \frac{n^3 - n}{3}$$

d) $n = 3$: $\frac{24}{3} = 8$ ($0 + 1 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 0$ ✓) ; $n = 4$: 20 ✓ Distance moyenne $\frac{D_n}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{3n} \sim \frac{n}{3}$ (comme sur un segment de longueur n).

Réponse. $D_n = \frac{n^3 - n}{3}$; distance moyenne $\frac{n^2 - 1}{3n} \approx \frac{n}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Somme de Riemann et ln 2

a) $\frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$ pour $1 \le k \le n$, et on somme les n termes.

b) $u_{n+1} = \sum_{j=n+2}^{2n+2} \frac{1}{j}$, $u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$: la différence vaut $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$.

c) $u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = H_{2n} - H_n$. Et $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = H_{2n} - 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = H_{2n} - H_n$.

d)

$$u_n = \ln(2n) - \ln n + o(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2$$

— On obtient $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$.

Réponse. $\frac{1}{2} \le u_n < 1$, croissante ; $u_n = H_{2n} - H_n = \sum_{k \le 2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \to \ln 2$.

Correction de l’exercice 8 – Mots avec un nombre pair de a

a) Positions des a : $\binom{n}{k}$; les autres lettres : 2^{n-k}. Total $\binom{n}{k}2^{n-k}$.

b) On somme sur $k = 2j$ pair.

c) $(2+1)^n = \sum \binom{n}{k}2^{n-k}$ et $(2-1)^n = \sum (-1)^k\binom{n}{k}2^{n-k}$; en ajoutant, les k impairs disparaissent :

$$\sum_{j} \binom{n}{2j} 2^{n-2j} = \frac{3^n + 1}{2}$$

d) $n = 2$: sans a : bb, bc, cb, cc (4) ; avec deux a : aa (1). Total $5 = \frac{9+1}{2}$ ✓

Réponse. $\binom{n}{k}2^{n-k}$ mots à k lettres a ; $\frac{3^n+1}{2}$ mots à nombre pair de a.

Correction de l’exercice 9 – Somme alternée des carrés binomiaux

a) $(1-x)^n = \sum (-1)^k\binom{n}{k}x^k$, $(1+x)^n = \sum \binom{n}{j}x^j$; coefficient de x^n : $\sum_k (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = T_n$.

b) $(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n = \sum_j (-1)^j\binom{n}{j}x^{2j}$: seules les puissances paires apparaissent.

$$T_n = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \\ (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2} & n \text{ pair} \end{cases}$$

c) $n = 4$: $1 - 16 + 36 - 16 + 1 = 6 = \binom{4}{2}$ ✓ ; $n = 6$: $-\binom{6}{3} = -20$ (calcul direct $1 - 36 + 225 - 400 + 225 - 36 + 1 = -20$ ✓).

d) n impair : $(-1)^{n-k} = -(-1)^k$ et $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$: les termes k et $n-k$ s’annulent deux à deux.

Réponse. T_n = coefficient de x^n dans $(1-x^2)^n$: 0 si n impair, $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ sinon.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Nombres de Lucas

a) $\varphi+\psi=1$, $\varphi\psi=-1$: racines de X^2-X-1. Donc $\varphi^{n+2}=\varphi^{n+1}+\varphi^n$, de même pour ψ, et on ajoute.

b) $L_0=2$, $L_1=1$; récurrence double : entiers. $L_2,\dots,L_7=3,4,7,11,18,29$.

c) $(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n=2\sum_j\binom{n}{2j}5^j$ (termes impairs annulés), divisé par 2^n :

$$L_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_j\binom{n}{2j}5^j$$

d) $|\psi|<1$ donc $\psi^n\to 0$ et $\varphi^n=L_n-\psi^n$ est proche de l'entier L_n. $n=10$: $L_{10}=123$, écart $|\psi|^{10}\approx 0{,}0081$ ($\varphi^{10}\approx 122{,}99$).

Réponse. L_n entiers : $2,1,3,4,7,11,18,29$; $\varphi^{10}\approx 123-0{,}008$.

Correction de l'exercice 11 – Majorer une somme de factorielles

a) Chacun des $n-2$ termes est $\le (n-2)!$; et $(n-2)(n-2)!\le(n-1)(n-2)!=(n-1)!$.

b) $F_n=n!+(n-1)!+\sum_{k\le n-2}k!\le n!+2(n-1)!=n!\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

c) $1\le\frac{F_n}{n!}\le 1+\frac{2}{n}\to 1$:

$$F_n\sim n!$$

d) $F_6=1+2+6+24+120+720=873\le 720\times\frac{4}{3}=960$ ✓ Pour $k\ge 5$, $k!$ est multiple de 10 ; $F_4=33$ finit par 3, donc F_n aussi pour $n\ge 4$.

Réponse. $n!\le F_n\le n!(1+\frac{2}{n})$, $F_n\sim n!$; $F_6=873$; dernier chiffre 3.

Correction de l'exercice 12 – Vandermonde décalée

a) $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{n-k-1}$; $\sum_k\binom{n}{k}\binom{n}{n-1-k}$ est le coefficient de x^{n-1} dans $(1+x)^{2n}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}=\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n+1}$$

b) $n=3$: $1\times 3+3\times 3+3\times 1=15=\binom{6}{4}$ ✓ ; $n=4$: $4+24+24+4=56=\binom{8}{5}$ ✓

c) $\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot\frac{n}{n+1}$.

d) Différence de deux entiers, égale à $\binom{2n}{n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$: $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\in\mathbb{N}$ ($C_3=5$, $C_4=14$).

Réponse. $\sum\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}=\binom{2n}{n+1}$; $C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Correction de l'exercice 13 – Somme de cosinus bornée

a) $\sum_{k=1}^{n}e^{ik}=e^{i}\frac{e^{in}-1}{e^{i}-1}=e^{i(n+1)/2}\frac{\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$ (angle moitié), dont la partie réelle donne la formule.

b)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$|C_n| \le \frac{\left|\sin\frac{n}{2}\right|\left|\cos\frac{n+1}{2}\right|}{\sin\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} \approx 2{,}086$$

c) Oui : $1{,}54 \le 2{,}09$; la borne n'est pas atteinte car $\sin\frac{n}{2}$ et $\cos\frac{n+1}{2}$ ne valent jamais simultanément ± 1.

d) $\left|\frac{C_n}{n}\right| \le \frac{2{,}09}{n} \to 0$. Pour $\sum \frac{\cos k}{k}$, le fait que les sommes partielles de $\cos k$ soient **bornées** et que $\frac{1}{k}$ décroisse vers 0 assure la convergence (critère d'Abel, vu plus tard).

Réponse. $C_n = \frac{\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$, $|C_n| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} \approx 2{,}09$; moyenne $\to 0$.

Correction de l'exercice 14 – Sommes à pas 3 par les racines cubiques

a) Si $3 \mid p$, $j^p = 1$: somme 3. Sinon $j^p \neq 1$ et $1 + j^p + j^{2p} = \frac{1 - j^{3p}}{1 - j^p} = 0$.

b) $\sum_{r=0}^{2} (1 + j^r)^n = \sum_k \binom{n}{k} \sum_r j^{rk} = 3 \sum_{3 \mid k} \binom{n}{k}$.

c) $1 + j = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\pi/3}$, et $1 + j^2 = \overline{1 + j}$:

$$\sum_k \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

d) $n = 6$: $\frac{64 + 2}{3} = 22 = 1 + 20 + 1$ ✓ ; $n = 9$: $\frac{512 - 2}{3} = 170 = 1 + 84 + 84 + 1$ ✓

Réponse. $\sum \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})$; 22 pour $n = 6$, 170 pour $n = 9$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : compter les solutions de x + 2y = n

a) y peut prendre toute valeur de 0 à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et $x = n - 2y$ est alors déterminé.

b) On fixe z (de 0 à $\lfloor n/3 \rfloor$) puis on applique a) à $n - 3z$. $b_6 = a_6 + a_3 + a_0 = 4 + 2 + 1 = 7$.

c) $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \left(\sum x^i\right)\left(\sum x^{2j}\right)$: le coefficient de x^n compte les (i,j) avec $i + 2j = n$:

$$\sum_{n \ge 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

d) $b_6 = 7$: $3+3$, $3+2+1$, $3+1+1+1$, $2+2+2$, $2+2+1+1$, $2+1+1+1+1$, 1×6 ✓

Réponse. $a_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$; $b_6 = 7$ façons de payer 6 € ; séries génératrices $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).