# Plaquette 3 – Coefficients binomiaux et formule du binôme

## Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

**Méthode**

Les identités sur les coefficients binomiaux se démontrent de trois façons : par le **calcul** (factorielles), par la **formule du binôme** appliquée à une valeur bien choisie ($x = 1$, $x = -1$, $x = i$, dérivée), ou par un **argument combinatoire** (compter la même chose de deux façons). On choisit la plus économique, et on contrôle toujours sur un petit $n$. La formule du binôme vaut aussi pour des matrices **qui commutent**, ce qui donne les puissances de $I + N$ avec $N$ nilpotente.

### Exercice 1 – Sommes lacunaires par les racines de l'unité

Soit $n \geq 1$.

a) En ajoutant les développements de $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer $\sum_k \binom{n}{2k}$ et $\sum_k \binom{n}{2k+1}$.

b) En utilisant aussi $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$, montrer que $\sum_k \binom{n}{4k} = \frac{1}{4}\left(2^n + 2\mathrm{Re}(1+i)^n\right)$ ($n \geq 1$).

c) Calculer $(1+i)^8$ et en déduire $\binom{8}{0} + \binom{8}{4} + \binom{8}{8}$ ; vérifier directement.

d) Exprimer $\mathrm{Re}(1+i)^n$ en fonction de $n$ par la forme exponentielle.

### Exercice 2 – Une somme de Vandermonde pondérée

a) Rappeler pourquoi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b) À l'aide de la formule du capitaine, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$.

c) Donner une interprétation combinatoire de b) (comité de $n$ personnes parmi $n$ femmes et $n$ hommes, avec une présidente).

d) Vérifier pour $n = 5$ (630).

### Exercice 3 – Binôme modulo un nombre premier

Soit $p$ premier.

a) Montrer que $p \mid \binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$ (utiliser $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ et le lemme de Gauss).

b) En déduire que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ [p]$ pour tous entiers $a$, $b$.

c) Démontrer par récurrence sur $a \in \mathbb{N}$ le petit théorème de Fermat : $a^p \equiv a \ [p]$.

d) Vérifier a) pour $p = 7$ et montrer que a) est faux pour $p = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 4 – Le plus grand coefficient binomial

a) Montrer que $\dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{n-k}{k+1}$.

b) En déduire que $k \mapsto \binom{n}{k}$ croît jusqu'à $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ puis décroît.

c) En déduire que $\binom{2n}{n} \geq \dfrac{4^n}{2n+1}$.

d) Pour $n = 10$, comparer $\binom{20}{10}$ à cette borne et à la majoration $4^n$.

## Exercice 5 – Partie entière de (2 + √3)^n

Soit $x_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

a) Montrer par le binôme que $x_n$ est un entier pair (les termes en $\sqrt{3}$ impairs se compensent).

b) Montrer que $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$ pour $n \geq 1$.

c) En déduire que $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor = x_n - 1$ et que $(2+\sqrt{3})^n$ a une partie fractionnaire qui tend vers 1.

d) Calculer $x_1$, $x_2$, $x_3$ et vérifier sur $(2+\sqrt{3})^3 \approx 51{,}98$.

## Exercice 6 – Binôme matriciel

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + N$.

a) Calculer $N^2$ et $N^3$.

b) Justifier l'usage de la formule du binôme pour $(I_3 + N)^n$.

c) En déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Vérifier pour $n = 2$ par un calcul direct, et montrer que la formule vaut aussi pour $n = -1$.

## Exercice 7 – Différences finies et sommes alternées

Soit $n \geq 1$ et $S_j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^j$.

a) Calculer $S_0$ et, par la formule du capitaine, $S_1$.

b) En dérivant $(1-x)^n = \sum (-1)^k \binom{n}{k} x^k$ puis en multipliant par $x$ (opérateur $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$), montrer que $S_j = 0$ pour $0 \leq j < n$.

c) Montrer que $S_n = (-1)^n n!$.

d) Vérifier pour $n = 4$ : $S_0 = \cdots = S_3 = 0$ et $S_4 = 24$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 8 – Extraire un coefficient

a) Déterminer le coefficient de $x^5$ dans $(1+x)^3(1+x^2)^4$.

b) Déterminer le coefficient de $x^3$ dans $\left(x+\frac{1}{x}\right)^9$.

c) Déterminer le terme constant de $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6$.

d) Pour quelles valeurs de $n$ le développement de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ contient-il un terme constant ?

## Exercice 9 – Coefficients multinomiaux

a) Montrer que le coefficient de $a^p b^q c^r$ $(p+q+r=n)$ dans $(a+b+c)^n$ est $\frac{n!}{p!q!r!}$ (appliquer deux fois le binôme).

b) Calculer le coefficient de $a^2bc^3$ dans $(a+b+c)^6$.

c) Combien le développement de $(a+b+c)^n$ comporte-t-il de termes distincts ?

d) Interpréter b) comme un nombre d'anagrammes.

## Exercice 10 – Une identité de sous-ensembles emboîtés

a) Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ pour $0\le j\le k\le n$ (calcul, puis argument combinatoire).

b) En déduire $\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\binom{n}{j}2^{n-j}$.

c) Interpréter b) : couples $(B,A)$ avec $B\subset A\subset E$, $|B|=j$.

d) Vérifier pour $n=5, j=2$ (80).

## Exercice 11 – Somme alternée avec 1/(k+1)

a) Montrer que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

b) En déduire $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}$.

c) Retrouver ce résultat en intégrant $(1-x)^n$ sur $[0,1]$.

d) Vérifier pour $n=6$.

## Exercice 12 – Pascal modulo 2

a) Montrer que $(1+x)^2\equiv 1+x^2$ modulo 2 (coefficients réduits modulo 2), puis que $(1+x)^{2^m}\equiv 1+x^{2^m}$.

b) En déduire que $(1+x)^{2^m-1}\equiv 1+x+\cdots+x^{2^m-1}$ modulo 2 (multiplier par $1+x$).

c) Conclure que tous les $\binom{2^m-1}{k}$ sont impairs. Vérifier pour $m=4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Montrer que $\binom{2^m}{k}$ est pair pour $0 < k < 2^m$.

## Exercice 13 – Somme binomiale trigonométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}$ par le binôme.

b) Factoriser $1 + e^{ix}$ par l'angle moitié.

c) En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \cos\frac{nx}{2}$ et la somme des sinus.

d) Vérifier numériquement pour $n = 6$, $x = 0{,}7$ ($\approx -22{,}2007$).

## Exercice 14 – Sommes alternées partielles

a) Montrer par récurrence sur $m$ (ou par Pascal et télescopage) que $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$ pour $n \geq 1$.

b) Vérifier pour $n = 7$, $m = 3$.

c) Que retrouve-t-on pour $m = n$ ?

d) En déduire que les sommes partielles alternées sont de signe alterné et majorées en valeur absolue par $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$.

## Exercice 15 – Synthèse : encadrer (1 + 1/n)^n

Soit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

a) Montrer par le binôme que $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$.

b) En déduire que $(u_n)$ est croissante et que $u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$.

c) Pour $n = 100$, minorer $u_{100}$ en ne gardant que les termes $k \leq 3$.

d) On donne $u_{100} \approx 2{,}7048$ : comparer à e et à la minoration.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).