Plaquette 4 – Inégalités : techniques et applications

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour démontrer une inégalité, on dispose de quelques leviers : **étudier le signe d'une différence** (souvent un carré), **étudier une fonction** (tangente, convexité), **comparer terme à terme** puis sommer, **télescoper** une majoration, ou appliquer une inégalité classique (arithmético-géométrique, Cauchy-Schwarz). On précise toujours les **cas d'égalité**, qui servent de contrôle, et on teste l'inégalité sur un exemple numérique.

Exercice 1 – Inégalités par des carrés

Soient a, b, c réels et $x, y > 0$.

a) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ et préciser le cas d'égalité.

b) Montrer que $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$.

c) Montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

d) Montrer que $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Exercice 2 – Démontrer Cauchy-Schwarz

Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ réels, les a_k non tous nuls.

a) Montrer que $P(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k t + b_k)^2$ est un trinôme positif.

b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz par le discriminant.

c) Étudier le cas d'égalité.

d) Application : montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq \frac{n^2}{\sum a_k}$ pour des $a_k > 0$.

Exercice 3 – Les quatre moyennes

Soient $a, b > 0$ et $H = \frac{2ab}{a+b}$, $G = \sqrt{ab}$, $A = \frac{a+b}{2}$, $Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

a) Montrer $G \leq A$.

b) Montrer $H \leq G$ (utiliser $\frac{1}{H}$ = moyenne arithmétique de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$).

c) Montrer $A \leq Q$.

d) Calculer les quatre moyennes pour $a = 1$, $b = 4$, et interpréter H (vitesse moyenne aller-retour).

Exercice 4 – Inégalités de convexité usuelles

a) Montrer que $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ pour tout réel x (étudier $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$).

b) En déduire que $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x > -1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $\sin x \le x$ pour $x \ge 0$, puis $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x$ pour tout x.

d) En déduire $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \mathrm{e} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice 5 – Encadrer n!

a) Montrer que $n! \le n^n$ et que $n! \ge 2^{n-1}$.

b) Montrer que $k(n+1-k) \ge n$ pour $1 \le k \le n$, et en déduire $(n!)^2 \ge n^n$.

c) Montrer que $n! \ge \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ (utiliser $\mathrm{e}^n = \sum \frac{n^k}{k!} \ge \frac{n^n}{n!}$).

d) Vérifier pour $n = 10$: $10! = 3\,628\,800$.

Exercice 6 – Inégalité de Tchebychev (réarrangement)

Soient $a_1 \le \cdots \le a_n$ et $b_1 \le \cdots \le b_n$ deux suites **de même sens**.

a) Montrer que $\sum_{i,j} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0$.

b) En déduire l'inégalité de Tchebychev : $\frac{1}{n}\sum a_k b_k \ge \left(\frac{1}{n}\sum a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_k\right)$.

c) Que devient l'inégalité si les suites sont de sens contraires ?

d) Application : montrer que $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k^2 \ge \frac{1}{n}\left(\sum k\right)\left(\sum k^2\right)$ et vérifier pour $n = 3$.

Exercice 7 – Majorer une série par télescopage

a) Montrer que $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \ge 2$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n}$.

c) En déduire que la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge ; donner un encadrement de sa limite.

d) Minorer de même $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ par $\frac{1}{k(k+1)}$ et vérifier pour $n = 3$.

Exercice 8 – Encadrer la série harmonique

Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que $\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln k \le \frac{1}{k}$ (utiliser $\ln(1+x) \le x$).

b) En déduire $\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln n$.

c) En déduire $H_n \sim \ln n$ et vérifier pour $n = 10$.

d) Montrer que $u_n = H_n - \ln n$ est décroissante et minorée, donc convergente (constante d'Euler $\gamma \approx 0{,}577$).

Exercice 9 – Optimiser avec l'inégalité arithmético-géométrique

a) Parmi les rectangles d'aire A fixée, lequel a le plus petit périmètre ?

b) Parmi les pavés droits de volume V fixé, montrer que le cube minimise l'aire totale

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

(utiliser l'IAG à trois termes $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$).

c) Minimiser $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ en écrivant $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$.

d) Vérifier c) par une étude de fonction.

Exercice 10 – Produit de facteurs (1 + a_k)

a) Montrer par récurrence que pour $a_1, \dots, a_n \ge 0$: $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Montrer la majoration $\prod (1+a_k) \le \exp\left(\sum a_k\right)$.

c) En déduire que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ est majoré, et donner un majorant.

d) Montrer au contraire que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \to +\infty$ (calcul exact).

Exercice 11 – Inéquations avec valeurs absolues

a) Résoudre $|x-1| + |x-3| \le 4$.

b) Résoudre $|2x-1| < |x+2|$.

c) Montrer que $||a| - |b|| \le |a-b|$ et étudier le cas d'égalité.

d) Montrer que $|x-a| + |x-b| \ge |a-b|$ pour tout x ; pour quels x y a-t-il égalité ?

Exercice 12 – Somme des racines carrées

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

a) Montrer que $\frac{2}{3}\left(k^{3/2} - (k-1)^{3/2}\right) \le \sqrt{k} \le \frac{2}{3}\left((k+1)^{3/2} - k^{3/2}\right)$ (inégalité des accroissements finis appliquée à $t \mapsto t^{3/2}$).

b) En déduire $\frac{2}{3}n^{3/2} \le S_n \le \frac{2}{3}\left((n+1)^{3/2} - 1\right)$.

c) En déduire $S_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

d) Vérifier pour $n = 100$ ($S_{100} \approx 671{,}46$).

Exercice 13 – Inégalité de Nesbitt

Soient $a, b, c > 0$. On veut montrer $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

a) En posant $s = a+b+c$, écrire la somme $\sum \frac{a}{s-a}$ et montrer qu'elle vaut $s\sum \frac{1}{s-a} - 3$.

b) Appliquer l'exercice 2 d) aux trois nombres $s-a$, $s-b$, $s-c$.

c) Conclure et préciser le cas d'égalité.

d) Vérifier pour $(a,b,c) = (1,2,3)$.

Exercice 14 – Une inégalité sur les sommes et les carrés

Soient $x_1, \dots, x_n$ réels, $m = \frac{1}{n}\sum x_k$ leur moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $\sum (x_k - m)^2 = \sum x_k^2 - n m^2$.

b) En déduire $\left(\sum x_k\right)^2 \le n \sum x_k^2$, et retrouver Cauchy-Schwarz avec $b_k = 1$.

c) Montrer que $\max_k |x_k - m| \le \sqrt{\sum_k (x_k - m)^2}$.

d) Application : des notes de moyenne 12 et d'écart type 2 ; montrer qu'aucune note ne s'écarte de la moyenne de plus de $2\sqrt{n}$.

Exercice 15 – Synthèse : l'inégalité arithmético-géométrique générale

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$, $A = \frac{1}{n}\sum x_k$, $G = \left(\prod x_k\right)^{1/n}$.

a) En appliquant $\ln(1+t) \le t$ à $t = \frac{x_k}{A} - 1$, montrer que $\ln \frac{x_k}{A} \le \frac{x_k}{A} - 1$.

b) Sommer et en déduire $G \le A$.

c) Cas d'égalité.

d) Application : montrer que $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1/n} \le 1 + \frac{H_n}{n}$ et vérifier pour $n = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).