Plaquette 1 – Sommes, produits, binôme et inégalités

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On manipule les symboles Σ et Π (changement d'indice, télescopage, sommes doubles), on applique le **binôme de Newton** et la factorisation de $a^n - b^n$, puis on démontre des inégalités classiques. Le soin apporté aux indices est décisif.

Exercice 1 – Sommes usuelles

Calculer :

a) $\sum_{k=1}^{20} k$

b) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

c) $\sum_{k=1}^{n} (2k+3)$

Exercice 2 – Somme géométrique

Calculer :

a) $\sum_{k=0}^{n} 2^k$

b) $\sum_{k=3}^{10} 3^k$

Exercice 3 – Changement d'indice

Écrire $\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2$ sous la forme d'une somme d'indice partant de 1.

Exercice 4 – Télescopage

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 5 – Coefficients binomiaux

Calculer $\binom{7}{3}$, $\binom{10}{2}$ et $\binom{n}{n-1}$, puis vérifier la relation de Pascal $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$.

Exercice 6 – Binôme de Newton

Développer $(x+2)^4$ à l'aide du binôme de Newton.

Exercice 7 – Somme des coefficients binomiaux

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ en utilisant le binôme.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ pour $n \geq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Factorisation de a^n − b^n

a) Factoriser $a^3 - b^3$.

b) En déduire que $2^n - 1$ est divisible par $2^d - 1$ lorsque $d \mid n$ — on traitera le cas $n = 6$, $d = 3$.

Exercice 9 – Somme double

Calculer $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} (i + j)$.

Exercice 10 – Produits

Calculer :

a) $\prod_{k=1}^{5} k$

b) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}$

Exercice 11 – Inégalité arithmético-géométrique

a) Démontrer que pour $a, b \geq 0$: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

b) En déduire que pour $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 12 – Inégalité de Bernoulli

Démontrer par récurrence que pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 13 – Sommes doubles triangulaires

Soit $n \geq 1$.

a) Calculer $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$ en sommant d'abord sur i (à j fixé).

b) Recalculer S en sommant d'abord sur j (à i fixé) : on obtient $\sum_{i=1}^{n} i(n - i + 1)$. Vérifier l'égalité.

c) Calculer $T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$ à l'aide de $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2T$.

d) Contrôler S et T pour $n = 3$ en listant les termes.

Exercice 14 – Sommes pondérées de coefficients binomiaux

Soit $n \geq 1$.

a) Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$ (formule « du capitaine »).

b) En déduire $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

c) Montrer de même que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Vérifier b) et c) pour $n = 5$.

Exercice 15 – Synthèse : somme des cubes

a) Calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n = 4$ par le calcul direct et par la formule.

b) Vérifier l'identité remarquable $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ pour $n = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).