Plaquette 2 – Sommes et produits : techniques de calcul

Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Quatre techniques couvrent l'essentiel des calculs de sommes : le **télescopage** (écrire le terme général comme une différence $a_{k+1} - a_k$), la **dérivation** d'une somme géométrique (pour $\sum kq^k$), l'**interversion** des sommes doubles (en décrivant précisément le domaine des indices), et le passage aux **complexes** pour les sommes trigonométriques. Pour les produits, on passe au logarithme ou on télescope directement. Chaque formule finale se contrôle sur $n = 1, 2, 3$.

Exercice 1 – Somme arithmético-géométrique

Soit $q \neq 1$ et $S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

a) Dériver S_n par rapport à q pour obtenir $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ sous forme close.

b) Vérifier la formule pour $n = 3$, $q = 2$.

c) En déduire $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

d) Si $|q| < 1$, déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 – Télescopage d'ordre 2

a) Vérifier que $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$.

b) En déduire $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

c) Contrôler pour $n = 5$ (valeur $\frac{5}{21}$).

d) Donner la limite de la somme quand $n \to +\infty$ et généraliser la méthode à $\sum \dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}$.

Exercice 3 – Télescopages logarithmiques et produits

a) Calculer $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$ en factorisant chaque terme.

b) En déduire $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$ et sa limite.

c) Calculer $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k}{2k-1} \times \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$ et exprimer $\prod_{k=1}^{n} (2k-1)$ à l'aide de factorielles.

d) Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^k}\right)$ pour $x \neq 1$ (multiplier par $1 - x$).

Exercice 4 – Interversion de sommes

a) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \dfrac{1}{j}$ en intervertissant les sommes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer $\sum_{1 \le i,j \le n} \min(i,j)$ en sommant sur les « couronnes » $\min(i,j) = k$.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$ où $H_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$.

d) Contrôler a) et b) pour $n = 4$ (valeurs 4 et 30).

Exercice 5 – Sommes de puissances par télescopage

a) En sommant $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ pour $k = 1$ à n, retrouver $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

b) De même avec $(k+1)^4 - k^4$, retrouver $\sum k^3$.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ est un polynôme en n de degré $p+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{p+1}$ (récurrence forte sur p).

d) Calculer $\sum_{k=1}^{5} k^4$ avec la formule $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Exercice 6 – Somme des cosinus

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

a) Calculer $C_n + iS_n$ comme somme géométrique.

b) Factoriser numérateur et dénominateur par l'angle moitié et en déduire

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

c) En déduire l'expression de S_n.

d) Contrôler numériquement pour $n = 3$, $x = 0{,}5$ ($C_3 \approx 2{,}48862$).

Exercice 7 – Factorielles télescopiques

a) Montrer que $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

b) Montrer que $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ et sa limite.

c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$ (simplifier le dénominateur).

d) Contrôler a) pour $n = 5$.

Exercice 8 – Parties entières

a) Pour $m \ge 1$, combien d'entiers k vérifient $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$?

b) En déduire $\sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \frac{(n-1)n(4n+1)}{6}$.

c) Contrôler pour $n = 3$.

d) Calculer de même $\sum_{k=1}^{2^n-1} \lfloor \log_2 k \rfloor$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Conjugués et télescopage

a) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

b) En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$; que vaut la somme pour $n = 8$?

c) Montrer que $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

d) En déduire l'encadrement $2\sqrt{n+1}-2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1$ pour $n \geq 2$, et un équivalent.

Exercice 10 – Une somme d'arctangentes

a) Montrer que pour $a, b \geq 0$: $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$.

b) En déduire que $\arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \arctan(k+1) - \arctan k$.

c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$ et sa limite.

d) Contrôler pour $n = 1$ (partir de $k = 1$: $\arctan \frac{1}{3} = \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$).

Exercice 11 – Produits de termes consécutifs

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ en écrivant $k(k+1) = \frac{1}{3}[k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)]$.

b) Généraliser : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+p-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+p)}{p+1}$.

c) En déduire à nouveau $\sum k^2$ ($k^2 = k(k+1) - k$).

d) Relier b) à la crosse de hockey : $\sum_{k=1}^{n} \binom{k+p-1}{p} = \binom{n+p}{p+1}$.

Exercice 12 – Somme géométrique double

Soit $q \in]0,1[$.

a) Calculer $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} q^j$ en sommant d'abord sur i, puis en sommant d'abord sur j.

b) En déduire à nouveau $\sum_{j=0}^{n} (j+1)q^j$.

c) Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} q^{i+j}$ et $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} q^{\max(i,j)}$ pour $n \to +\infty$ (limites).

d) Contrôler c) pour $q = \frac{1}{2}$.

Exercice 13 – Produits et doubles factorielles

On note $W_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$.

a) Exprimer W_n à l'aide de $\binom{2n}{n}$.

b) Montrer que $W_n^2 \leq \frac{1}{2n+1}$ en comparant avec $V_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ (montrer $W_n \leq V_n$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire $\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$.

d) Vérifier pour $n = 5$.

Exercice 14 – Somme de termes en k·x^k complexe

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $z = e^{i\theta}$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ pour $\theta = \frac{2\pi}{n}$.

b) En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{2k\pi}{n}$ ($n \geq 2$).

c) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} k\,\omega^k$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$, à l'aide de la formule de l'exercice 1 (avec $q = \omega$).

d) Vérifier c) pour $n = 4$.

Exercice 15 – Synthèse : sommes de Riemann exactes

a) Calculer exactement $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$ et sa limite ; interpréter comme une intégrale.

b) Calculer $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$ (somme géométrique) et montrer qu'elle tend vers $e - 1$.

c) La somme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$ n'a pas de forme close simple : montrer qu'elle vaut $H_{2n} - H_n$ et qu'elle tend vers $\ln 2$ (on admet $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$).

d) Donner l'erreur $R_n - \frac{1}{3}$ et commenter l'ordre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).