# Plaquette 5 – Problèmes de synthèse en calcul algébrique

## Calcul algébrique — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

### Méthode

Ces problèmes combinent sommes, produits, binôme, complexes et inégalités. La démarche : reconnaître la **structure** (télescopage caché, somme géométrique en $e^{i\theta}$, coefficient d'un produit de polynômes, racines de l'unité), mener le calcul avec des indices soigneusement bornés, puis **contrôler** sur $n = 1, 2, 3$ ou numériquement. Les résultats sont souvent élégants : un résultat compliqué doit faire soupçonner une erreur.

### Exercice 1 – La série des k/2^k

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

a) Utiliser la formule $\sum_{k=1}^{n} k q^{k-1}$ (plaquette 2) avec $q = \frac{1}{2}$ pour obtenir $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

b) Retrouver le résultat par récurrence.

c) Vérifier pour $n = 5$.

d) En déduire la limite et interpréter en termes d'espérance (nombre moyen de lancers pour obtenir pile).

### Exercice 2 – Un télescopage caché

a) Factoriser $k^4 + k^2 + 1$ en produit de deux trinômes (penser à $(k^2+1)^2 - k^2$).

b) Montrer que $\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

c) Remarquer que $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$ et calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}$.

d) Vérifier pour $n = 3$ et donner la limite.

### Exercice 3 – Formules de Moivre et binôme

a) En développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ par le binôme, exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

b) Montrer que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

c) Faire de même pour $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

d) En déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ est racine de $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

### Exercice 4 – Produit des sinus

Soit $n \geq 2$ et $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$.

a) Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

b) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $|1-\omega_k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \le k \le n-1$.

d) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ et vérifier pour $n=3$ et $n=6$.

## Exercice 5 – Somme des carrés de sinus

a) Montrer que $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n}$ pour $n \ge 2$.

c) En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \sin^2\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2}$.

d) Vérifier pour $n=7$ (valeur 3,5) et interpréter comme une valeur moyenne.

## Exercice 6 – Somme double des distances

Soit $D_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j|$.

a) Montrer que $D_n = 2\sum_{1 \le i < j \le n} (j-i)$.

b) En fixant $d = j-i$, montrer que $D_n = 2\sum_{d=1}^{n-1} d(n-d)$.

c) En déduire $D_n = \frac{n^3-n}{3}$.

d) Vérifier pour $n=3$ et $n=4$ ; en déduire la distance moyenne entre deux points tirés uniformément dans $\{1,\dots,n\}$.

## Exercice 7 – Somme de Riemann et ln 2

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

a) Montrer que $\frac{1}{2} \le u_n < 1$ (encadrer chaque terme).

b) Montrer que $(u_n)$ est croissante ($u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$).

c) Montrer que $u_n = H_{2n} - H_n$ et que $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (série harmonique alternée).

d) En admettant $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, en déduire $u_n \to \ln 2$.

## Exercice 8 – Mots avec un nombre pair de a

On forme des mots de longueur $n$ sur l'alphabet $\{a,b,c\}$.

a) Combien de mots contiennent exactement $k$ lettres $a$ ?

b) Montrer que le nombre de mots avec un nombre **pair** de $a$ est $\sum_{j} \binom{n}{2j} 2^{n-2j}$.

c) En utilisant $(2+1)^n$ et $(2-1)^n$, montrer que ce nombre vaut $\frac{3^n+1}{2}$.

d) Vérifier pour $n=2$ en listant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

### Exercice 9 – Somme alternée des carrés binomiaux

Soit $T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

a) Montrer que $T_n$ est le coefficient de $x^n$ dans $(1-x)^n(1+x)^n$.

b) En déduire que $T_n = 0$ si $n$ est impair, et $T_n = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ si $n$ est pair.

c) Vérifier pour $n = 4$ et $n = 6$.

d) Montrer directement que $T_n = 0$ pour $n$ impair par un argument de symétrie ($k \leftrightarrow n-k$).

### Exercice 10 – Nombres de Lucas

Soient $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $L_n = \varphi^n + \psi^n$.

a) Montrer que $\varphi$ et $\psi$ sont racines de $X^2 - X - 1$, et que $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

b) Calculer $L_0$, $L_1$ et en déduire que $L_n$ est entier pour tout $n$ ; donner $L_2$ à $L_7$.

c) En développant $\varphi^n + \psi^n$ par le binôme, montrer que $L_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j} \binom{n}{2j} 5^j$.

d) En déduire que $\varphi^n$ est proche d'un entier pour $n$ grand, et calculer l'écart pour $n = 10$.

### Exercice 11 – Majorer une somme de factorielles

Soit $F_n = \sum_{k=1}^{n} k!$.

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n-2} k! \le (n-2)\,(n-2)! \le (n-1)!$ pour $n \ge 3$.

b) En déduire $n! \le F_n \le n!\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

c) En déduire $F_n \sim n!$.

d) Vérifier pour $n = 6$ et montrer que le dernier chiffre de $F_n$ est 3 pour $n \ge 4$.

### Exercice 12 – Vandermonde décalée

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1} = \binom{2n}{n+1}$ (coefficient de $x^{n+1}$ ou de $x^{n-1}$ dans un produit).

b) Vérifier pour $n = 3$ et $n = 4$.

c) Montrer que $\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$.

d) En déduire que $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ est un entier (nombre de Catalan).

### Exercice 13 – Somme de cosinus bornée

Soit $C_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer, à l'aide de $\sum_{k=1}^{n} e^{ik}$, que $C_n = \dfrac{\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$.

b) En déduire $|C_n| \le \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}} \approx 2{,}09$ pour tout $n$.

c) Numériquement, le maximum de $|C_n|$ pour $n < 500$ vaut environ 1,54 : est-ce cohérent ?

d) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos k \to 0$. Que dire de $\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k}$ (sans calcul) ?

## Exercice 14 – Sommes à pas 3 par les racines cubiques

Soit $j = e^{2i\pi/3}$.

a) Montrer que $1 + j^p + j^{2p}$ vaut 3 si $3 \mid p$, et 0 sinon.

b) En déduire $\sum_{k} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n\right)$.

c) Montrer que $1 + j = e^{i\pi/3}$ et en déduire $\sum_{k} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$.

d) Vérifier pour $n = 6$ et $n = 9$.

## Exercice 15 – Synthèse : compter les solutions de x + 2y = n

Soit $a_n$ le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + 2y = n$, et $b_n$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$.

a) Montrer que $a_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

b) En déduire $b_n = \sum_{z=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n - 3z}{2} \right\rfloor + 1 \right)$ et calculer $b_6$.

c) Interpréter $a_n$ comme le coefficient de $x^n$ dans $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ (produit de séries géométriques).

d) De combien de façons peut-on payer 6 euros avec des pièces de 1, 2 et 3 euros ? Lister pour vérifier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).